

Задача обитаемости в системах типов низкого ранга

Система $\lambda_{\wedge\eta}$

Кайсин Илья Сергеевич

научный руководитель: Москвин Денис Николаевич

НИУ ВШЭ СПб

7 июня 2019 г.

Термы	Тип
1, -120, 14	Int
true, false	Bool
$f (x: \text{Int}): x > 0$	$\text{Int} \rightarrow \text{Bool}$
?	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Изоморфизм Карри-Говарда

- Типы — высказывания
- Термы — доказательства
- Проверка типизации — проверка доказательства
- Население (поиск терма данного типа) — поиск доказательства

Система	Типы	Термы
λ	\rightarrow	$\lambda, @$
λ_{\wedge}	\rightarrow, \wedge	$\lambda, @$
$\lambda_{\eta\wedge}$	\rightarrow, \wedge [1]	$\lambda, @$
SystemF	\rightarrow, \forall	$\lambda, @, \Lambda$

[1] Присутствуют дополнительные правила вывода

$$\frac{}{\Gamma, x: \tau \vdash x: \tau} (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x: \sigma \vdash M: \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.M): \sigma \rightarrow \tau} (I \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N: \sigma}{\Gamma \vdash (MN): \tau} (E \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \quad \Gamma \vdash M: \tau}{\Gamma \vdash M: \sigma \wedge \tau} (I \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M: \sigma} (E \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\lambda x.Mx): \sigma}{\Gamma \vdash M: \sigma} (\eta)$$

Последние два правила можно заменить на (\leq) [2]

[2] Hindley, "The simple semantics for Coppo-Dezani-Sallé types," 1982.

$$\frac{}{\Gamma, x: \tau \vdash x: \tau} \text{ (Ax)}$$

$$\frac{\Gamma, x: \sigma \vdash M: \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.M): \sigma \rightarrow \tau} \text{ (I} \rightarrow \text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N: \sigma}{\Gamma \vdash (MN): \tau} \text{ (E} \rightarrow \text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \quad \Gamma \vdash M: \tau}{\Gamma \vdash M: \sigma \wedge \tau} \text{ (I} \wedge \text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M: \sigma \quad \sigma \leq \tau}{\Gamma \vdash M: \tau} (\leq)$$

Ранг типа

Максимальная глубина вложенности \wedge (или \vee) в качестве левого аппликанда \rightarrow

$$\text{rank}(\alpha \rightarrow \beta) = 0$$

$$\text{rank}(\alpha \wedge \beta) = 1$$

$$\text{rank}(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) = 1$$

$$\text{rank}((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) = 2$$

$$\text{rank}((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\gamma \wedge \delta)) = 2$$

Введение: известные результаты

Система	Результат
F	∞ [3]
F_k	
$\lambda_{\wedge \eta}$	∞ [4]
$\lambda_{\wedge k}$	$k > 2 : \infty$ [5]
	$k \leq 2 : \text{EXPSPACE}$ [6]
$\lambda_{\wedge \eta k}$	

[3] Urzyczyn, "Inhabitation in Typed Lambda-Calculi (A Syntactic Approach)," 1997.

[4] Urzyczyn, "The Emptiness Problem for Intersection Types," 1999.

[5] Urzyczyn, "Inhabitation of Low-Rank Intersection Types," 2009.

[6] Kusmierik, "The Inhabitation Problem for Rank Two Intersection Types," 2007.

Утверждение типизации $x : \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma \vdash x : \alpha \rightarrow \beta$ верно в $\lambda_{\wedge\eta}$, но неверно в λ_{\wedge}

Тип $\delta \wedge (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma) \rightarrow \delta \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$ населён в $\lambda_{\wedge\eta}$, но пуст в λ_{\wedge}

Цель

Исследовать проблему обитаемости в системах с пересечениями и ограничениями ранга

- Реализация алгоритма для $\lambda_{\wedge 2}$, приведённого в статье [7]
- Изучение $\lambda_{\wedge \eta 2}$: адаптация алгоритма
- Доказательство свойств корректности
- Исследование подсистем SystemF_2 :
 $\forall \sim$ бесконечное пересечение

[7] Kusmirek, "The Inhabitation Problem for Rank Two Intersection Types," 2007.

Основная идея

Решать несколько задач населения параллельно:
населить $\varphi \wedge \psi$ = найти терм, имеющий
одновременно тип φ и ψ

$$[\Gamma_1 \vdash X : \tau_1 \quad , \dots , \quad \Gamma_n \vdash X : \tau_n]$$

- 1 Если есть тип-пересечение, разбить его на задачи

Основная идея

Решать несколько задач населения параллельно:
населить $\varphi \wedge \psi$ = найти терм, имеющий
одновременно тип φ и ψ

$$[\Gamma_1 \vdash X : \tau_1 \quad , \dots , \quad \Gamma_n \vdash X : \tau_n]$$

- 1 Если есть тип-пересечение, разбить его на задачи
- 2 Если все типы стрелочные, то результат — это лямбда

Основная идея

Решать несколько задач населения параллельно:
населить $\varphi \wedge \psi$ = найти терм, имеющий
одновременно тип φ и ψ

$$[\Gamma_1 \vdash X : \tau_1 \quad , \dots , \quad \Gamma_n \vdash X : \tau_n]$$

- 1 Если есть тип-пересечение, разбить его на задачи
- 2 Если все типы стрелочные, то результат — это лямбда
- 3 Если хотя бы одна из задач — типовая переменная, нужно найти в контексте, **как её получить**, при этом тип должен подходить и другим задачам

Алгоритм для $\lambda_{\wedge\eta}$: шаг 3

Если i -я задача — получить τ_i , то нужно найти такие x и k , что

$$\Gamma_i \vdash x : \rho_i^1 \rightarrow \dots \rightarrow \rho_i^k \rightarrow \tau_i$$

Оказывается, это эквивалентно:

$$\Gamma_i \ni x : \varphi_0 \wedge (\overline{\rho}_i^1 \rightarrow \varphi_1 \wedge (\overline{\rho}_i^2 \rightarrow \varphi_2 \wedge \dots (\overline{\rho}_i^k \rightarrow \tau_i) \dots))$$

($\overline{\sigma}$ — надтип, $\underline{\sigma}$ — подтип)

Тогда решение — $X = xZ^1 \dots Z^k$,

где Z^k — решение $[\Gamma_1 \vdash Z^1 : \rho_1^k, \dots, \Gamma_n \vdash Z^k : \rho_n^k]$.

Soundness

Алгоритм действительно выдаёт обитателей

Следует из построения

Completeness

Если обитатели существуют, алгоритм их найдет

Если M — решение задачи $[\Gamma_i \vdash X : \tau_i]_i$, $M = xM_1 \dots M_k$,
то $\Gamma_i \vdash x : \alpha_i^1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_i^k \rightarrow \tau_i$

Termination

Для типов ранга ≤ 2 алгоритм завершается за конечное время

Типы в контекстах имеют ранг ≤ 1 , поэтому количество « \wedge » в правых частях « \vdash » не увеличивается

EXPSPACE

При работе алгоритм использует память (не более чем) экспоненциального размера

Система	Результат
F	∞
F_k	
$\lambda_{\wedge \eta}$	∞
$\lambda_{\wedge k}$	$k > 2 : \infty$
	$k \leq 2 : \text{EXPSPACE}$
$\lambda_{\wedge \eta k}$	

Система	Результат
F	∞
F_k	
$\lambda_{\wedge \eta}$	∞
$\lambda_{\wedge k}$	$k > 2 : \infty$
	$k \leq 2 : \text{EXPSPACE}$
$\lambda_{\wedge \eta k}$	$k \leq 2 : \text{EXPSPACE}$

Результаты

- Устранены недостатки статьи *Kusmierek, "The Inhabitation Problem for Rank Two Intersection Types," 2007*
- Разработан алгоритм для $\lambda_{\wedge\eta}$
- Показаны корректность, полнота и завершаемость алгоритма, что влечёт разрешимость проблемы обитаемости в системе $\lambda_{\wedge\eta}$
- Алгоритмы для λ_{\wedge} и $\lambda_{\wedge\eta}$ реализованы и протестированы на Haskell

Дальнейшие планы

Проанализировать SystemF_2 и её подсистемы

- [1] J. R. Hindley, “The simple semantics for Coppo-Dezani-Sallé types,” в *International Symposium on Programming*, M. Dezani-Ciancaglini и U. Montanari, ред., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1982, с. 212—226.
- [2] P. Urzyczyn, “Inhabitation in Typed Lambda-Calculi (A Syntactic Approach),” в *Typed Lambda Calculi and Applications, Third International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications, TLCA '97, Nancy, France, April 2-4, 1997, Proceedings*, P. d. Groote, ред., сер. Lecture Notes in Computer Science, т. 1210, Springer, 1997, с. 373—389, ISBN: 978-3-540-62688-6. DOI: 10.1007/3-540-62688-3_47.

- [3] —, “The Emptiness Problem for Intersection Types,” *J. Symb. Log.*, т. 64, № 3, с. 1195—1215, 1999. DOI: 10.2307/2586625. url: <https://doi.org/10.2307/2586625>.
- [4] P. Urzyczyn, “Inhabitation of Low-Rank Intersection Types,” в *Proceedings of the 9th International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, сер. TLCA '09, event-place: Brasilia, Brazil, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, с. 356—370, ISBN: 978-3-642-02272-2. DOI: 10.1007/978-3-642-02273-9_26. url: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02273-9_26.

- [5] D. Kusmierek, “The Inhabitation Problem for Rank Two Intersection Types,” *CoRR*, т. abs/cs/0701029, 2007. url: <http://arxiv.org/abs/cs/0701029>.
- [6] I. Kaysin, *The implementation of the inhabitation algorithm for rank two intersection types: demarkok/Inhabitation*, original-date: 2018-03-28T13:15:56Z, апр. 2019. url: <https://github.com/demarkok/Inhabitation> (дата обр. 25.04.2019).