

НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург

Магистерская программа

"Аналитика данных для бизнеса и экономики"

Темы для подготовки к экзамену по высшей математике

1 Линейная алгебра

1.1 Линейное пространство. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение. Ортогональность. Длина (норма) вектора и расстояние в Евклидовом пространстве.

1.2 Определитель квадратной матрицы. Вычисление определителей. Разложение определителя по строке и столбцу.

1.3 Элементарные преобразования матрицы. Транспонирование. Ранг матрицы. Обратная матрица.

1.4 Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений.

1.5 Собственные числа и собственные векторы квадратных матриц. Свойства собственных чисел и собственных векторов некоторых специальных классов матриц: симметричных матриц, неотрицательных матриц (теорема Фробениуса-Перрона), ортогональных проекторов.

1.6 Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Условие положительной (отрицательной) определенности квадратично формы. Критерий Сильвестра.

1.7 Норма матрицы. Матричные нормы, подчиненные векторным нормам в \mathbb{R}^n . Понятие о сжимающем линейном отображении. Обратная матрица вида $I - A$. Ряд Неймана.

1.8 Элементы аналитической геометрии. Уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой и плоскости в трехмерном пространстве. Плоские кривые второго порядка: уравнение эллипса, параболы, гиперболы. Приведение матрицы к диагональному виду. Нахождение главных осей эллипса и гиперболы.

2 Математический анализ

2.1 Множества. Операции над множествами. Числовые множества. Множества в \mathbb{R}^n . Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.

2.2 Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Вычисление пределов.

2.3 Функции одной переменной. Производные. Исследование и построение графика функции.

2.4 Безусловный экстремум функции одной переменной. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении функции. Условие первого порядка для внутреннего экстремума. Задачи с параметром на нахождение внутренних и граничных экстремумов функции одной переменной.

2.5 Функции многих переменных. Частные производные. Полный дифференциал. Градиент функции. Производная по направлению. Матрица Гессе.

2.6 Безусловный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия внутреннего экстремума функции многих переменных. Задачи с параметром на нахождение экстремумов функции многих

переменных.

2.7 Выпуклые множества. Выпуклые и вогнутые функции. Неравенство Йенсена. Условия выпуклости и вогнутости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.

2.8 Оптимизация при наличии ограничений. Метод множителей Лагранжа. Гессиан. Условие второго порядка для внутреннего экстремума. Угловые решения. Теорема Куна-Таккера. Задачи с параметром на нахождение внутренних и угловых экстремумов функции многих переменных.

2.9 Неопределенных интеграл и его исчисление. Определенных интеграл. Несобственные интегралы. Кратные интегралы и их исчисление.

2.10 Понятие ряда и его сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда.

2.11 Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

3 Обыкновенные дифференциальные уравнения

3.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка, разрешенные относительно производной. Понятие общего и частного решения ОДУ. Интегральные кривые. Задачи Коши.

3.2 Уравнение в полных дифференциалах. Метод замены переменных. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли и Риккати.

3.3 Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации постоянной. Линейные дифференциальные уравнения n -ого порядка.

3.4 Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Устойчивость решения по Ляпунову.

3.5 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью в виде квазимногочлена.

3.6 Система линейных дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости решений динамической системы. Устойчивость решений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

3.7 Автономные ОДУ. Элементы качественного анализа. Фазовые диаграммы и их использование для установления локальной устойчивости стационарных решений.

3.8 Начальные сведения о разностных уравнениях и системах разностных уравнений. Итерации нелинейного отображения, теорема о сжимающем отображении.

4 Теория вероятностей

4.1 Случайные события и их вероятность. Понятие независимости. Условная вероятность.

4.2 Случайные величины и законы распределения вероятности. Дискретные и непрерывные распределения. Кумулятивная функция распределения. Функция плотности непрерывного распределения. Примеры дискретных распределений: биномиальное, геометрическое, распределение Пуассона. Примеры непрерывных распределений: равномерное, показательное, степенное (Парето), нормальное. Характеристики случайных величин:

математическое ожидание, дисперсия, мода, медиана.

4.3 Распределения, связанные с нормальным распределением: логнормальное распределение, χ^2 -распределение, усеченное нормальное распределение, распределения Стьюдента и Фишера. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

4.4 Совместное распределение двух случайных величин. Условное распределение. Условное математическое ожидание, условная дисперсия. Коэффициент корреляции. Линейная регрессия. Двухмерное нормальное распределение и его характеристики. Формула Байеса.

5 Математическая статистика

5.1 Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение и выборочные характеристики (среднее, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции). Корреляционная связь .

5.2 Статистическое оценивание. Точечные оценки. Линейность, несмещенность, эффективность и состоятельность оценок. Интервальные оценки, доверительный интервал. Метод моментов и метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.

5.3 Статистические выводы и проверка статистических гипотез. Уровень доверия и проверка значимости. Примеры проверки гипотез: гипотеза о равенстве средних, гипотеза о равенстве среднего заданному значению.

6 Дискретная математика

6.1 Бинарные отношения и их свойства (рефлексивность, транзитивность, симметричность, полнота). Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

6.2 Начальные сведения о графах. Ориентированные и неориентированные графы. Связанность и сильная связанность графов. Компоненты связанности. Матрица смежности графа.

6.3 Двудольные графы. Паросочетания. Задача о максимальном паросочетании.

Литература

1. Бэллман, Р. Введение в теорию матриц. Рипол Классик, 2014.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
3. Хорн, Р., Джонсон, Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3. 8-е издание. - М.: Физматлит, 2003. - 680 с., 864 с., 728 с.
5. Б.П. Демидович. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Издание одиннадцатое, стереотипное. - М.: Наука, 1968. - 472 с.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. - 331с. Издание 4-е.

7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика” 2000.
8. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Рипол Классик, 1975.
9. Сюдсетер К. и др., Справочник по математике для экономистов. “Экономическая школа”, 2000.
10. Крамер Г., Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648с.
11. Боровков А. А. Теория вероятностей. Учебное пособие для вузов — второе издание (переработанное и дополненное), - Москва: “Наука”, 1986.
12. Боровков А. А. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007.
13. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 3-е издание — СПб: Питер, 2009, 384с.
14. Шварц Ф. А., Хабина Э.Л., Алексеров Ф. Т., Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Издание Дом ГУ-ВШЭ, 2006, 400с.
15. Ross S. M. A First Course in Probability. - PE, 2013.
16. Sydsaeter K. Hammond P. Essential Mathematics for Economic Analysis. Prentice Hall, 2012. 768 p.
17. Sydsaeter K. Hammond P. Further Mathematics for Economic Analysis. Prentice Hall, 2008. 632 p.
18. Barabasi A.-L. Network Science. Cambridge University Press, 2015.
19. Newman M. Networks: An Introduction. Oxford University Press, 2010.

НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург

Магистерская программа

"Аналитика данных для бизнеса и экономики"

Демо экзамена по высшей математике

Решите следующие 10 задач из предложенных ниже. Продолжительность экзамена – 90 минут.

Экзаменационная работа оценивается по 100-балльной шкале, максимальный вес каждого задания – 12 баллов.

В течение экзамена абитуриентам разрешается пользоваться только письменными принадлежностями.

Задача 1. Найдите множество значений функции $g(x, y, z) \equiv 5x^2 + 2y^2 - z^2$ на множестве

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Задача 2. Дана функция

$$F(x, y) = \frac{x + y}{1 + x + y} - x \ln x - y \ln y, \quad (1)$$

определённая для всех векторов (x, y) с положительными координатами. Запишите уравнение касательной плоскости к графику функции, заданной уравнением (1), в точке $(x, y) = (1, 3)$.

Задача 3. Дана оптимизационная задача:

$$\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} px + qy \quad \text{при ограничениях: } x \geq 0, y \geq 0, \alpha \ln(x) + (1 - \alpha) \ln(y) \geq 0, \quad (2)$$

где p, q и α – положительные вещественные параметры, причём $\alpha < 1$. Найдите выражения для точки оптимума и оптимального значения целевой функции в задаче (2) через параметры p, q и α .

Задача 4. Дана оптимизационная задача:

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} x + \ln y, \quad \text{при ограничениях: } x > 0, y \geq 0, x + y \leq w, \quad (3)$$

где w – положительный вещественный параметр.

1) При каких значениях параметра w допустимое множество задачи (3) не пусто?

2) При каких значениях параметра w задача (3) имеет внутреннее решение?

Задача 5. Для обнаружения некоей болезни проводится тестирование. Тест даёт «верно положительный» результат (то есть больной человек получает положительный результат) для 94% больных. Тест даёт «верно отрицательный» результат (то есть здоровый человек получает отрицательный результат) для 99% здоровых. Известно, что больны 152 из каждых 100000 человек в популяции. Какова вероятность того, что человек болен, если он получил положительный результат теста?

Задача 6. Пусть случайные величины X и Y независимы, и каждая из них имеет стандартное нормальное распределение, а случайные величины Z и W заданы следующим образом:

$$Z \equiv X - Y, \quad W \equiv e^X.$$

- 1) Найдите совместную плотность распределения случайного вектора (X, Z) .
- 2) Найдите условные математические ожидания $\mathbb{E}(X|Z)$ и $\mathbb{E}(X|W)$.

Задача 7. Имеются две случайные величины, \tilde{x} и \tilde{y} , с совместной плотностью $f(x, y)$ заданной следующей таблицей:

$f(x, y)$	$\tilde{y} = 10$	$\tilde{y} = 20$	$\tilde{y} = 30$
$\tilde{x} = 1$	0.04	0	0.20
$\tilde{x} = 2$	0.07	0	0.18
$\tilde{x} = 3$	0.02	0.11	0.07
$\tilde{x} = 4$	0.01	0.12	0.18

1. Постройте таблицу, показывающую функцию распределения $F(x; y)$
2. Найдите одномерные распределения $F_{\tilde{x}}(x)$ и $F_{\tilde{y}}(y)$.
3. Найдите плотности распределения $f_{\tilde{x}}(x)$ и $f_{\tilde{y}}(y)$.
4. Найдите условную плотность $f(x|\tilde{y} = 20)$.
5. Найдите среднее значение \tilde{y} .
6. Найдите среднее значение \tilde{x} , при условии, что $\tilde{y} = 20$.
7. Являются ли \tilde{x} и \tilde{y} независимыми переменными?

Задача 8. Найдите собственные числа и собственные векторы матриц

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где ρ – вещественный параметр.

При каких значениях ρ собственные векторы матрицы \mathbf{A} образуют базис в плоскости \mathbb{R}_+^2 ?

Докажите (или опровергните), что собственные векторы матрицы \mathbf{B} образуют базис в плоскости \mathbb{R}_+^2 .

Задача 9. Для заданного дифференциального уравнения изобразите его интегральные кривые:

$$ydx + 2xdy = 0.$$

Задача 10. Дано дифференциальное уравнение, где $y = y(x)$:

$$y' - \frac{2}{x+1}y = e^x (x+1)^2.$$

Найдите его общее решение и решите задачу Коши для начального условия: $y(0) = 1$.