Параметризация максимального разреза над нижними оценками

Епифанов Владислав Николаевич

научный руководитель: к.ф.-м.н. И.А. Близнец

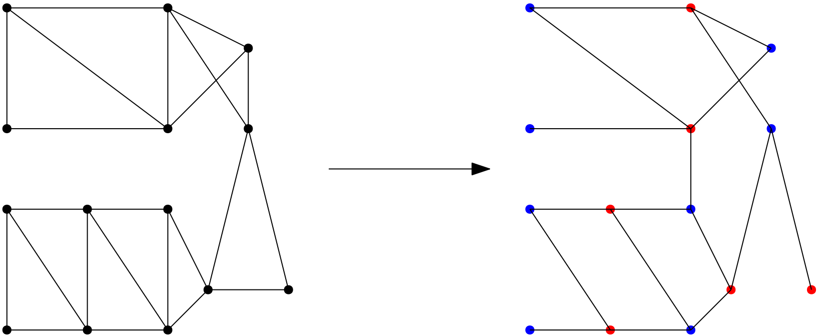
НИУ ВШЭ (СПб)

9 июня 2021 г.

Определение Max-Cut

Определение (Max-Cut)

Дан G и число c. Существуют ли $A \sqcup B = V$ что есть c ребер между A и B?



Полнота Max-Cut

Max-Cut NP-полный на[1]

- хордальных графах:
  без индуцированных циклов длины > 3
- расщепляемых графах:
  клика $+$ независимое множество
- кодвудольных:
  дополнение двудольных
- трехдольных

[1] Bodlaender and Jansen, "On the complexity of the maximum cut problem", 1994.

Параметризация

NP-полная, значит не решается за полиномиальное время (при P $\neq$ NP).

Параметризованные алгоритмы:

- FPT: k – параметр задачи. Решим за $f(k)\,\mathrm{poly}(|G|)$.
- Ядро: Уменьшаем входные данные до размера $f(k)$, сохраняя ответ.

Параметризация над нижней оценкой

Нижние оценки:

- $\frac{|E(G)|}{2}$
- $\frac{|E|}{2} + \frac{|V|-1}{4}$ (оценка Эдвардса-Эрдёша)
- $|V| - 1$ (оценка остовным деревом)

Всегда есть большой разрез $\Rightarrow$ его размер плохой параметр.

$k =$ размер разреза $- LB(G)$.
Найти разрез $LB(G) + k$ за время $\text{poly}(|G|)f(k)$

Известные результаты

- FPT[2] над $\frac{|E|}{2}$
- FPT[3] над оценкой Эдвардса-Эрдёша, ядро на $\mathcal{O}(k)$ вершин
- FPT[4] над $|V| - 1$ с алгоритмом за $8^k \mathrm{poly}(n)$, ядро $\mathcal{O}(k^5)$ вершин и ребер

[2] Mahajan and Raman, "Parameterizing above Guaranteed Values: MaxSat and MaxCut", 1999.

[3] Etscheid and Mnich, "Linear Kernels and Linear-Time Algorithms for Finding Large Cuts", 2018.

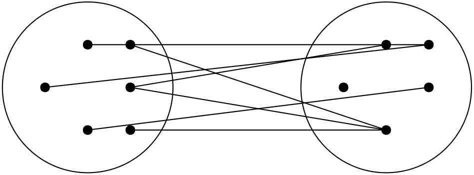
[4] Madathil et al., "Max-Cut Above Spanning Tree is Fixed-Parameter Tractable", 2018.

Цель и задачи

Разработка более эффективных алгоритмов и меньших ядер для параметризаций Max-Cut над нижними оценками

- Улучшить алгоритмы и ядра для Max-Cut над $|V| - 1$ на
  - хордальных графах
  - расщепляемых графах
  - кодвудольных
  - трехдольных
- Изучить вычислительную сложность Max-Cut над $\frac{2|E|}{3}$ на трехдольных

Кодвудольные $|V| - 1 + k$



Алгоритм $2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$

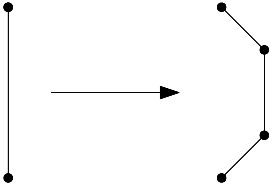
- $k \le \mathcal{O}(n^2) \Rightarrow$ Клика $\frac{n}{2}$ дает большой разрез
- $k > \mathcal{O}(n^2) \Rightarrow$ перебор $2^n < 2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$

Хордальные графы $|V| - 1 + k$

Перебор фактов про хордальные графы дает алгоритм $2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$:

- TW $=$ древесная ширина
- В хордальном графе есть клика $\geq$ TW (и ее можно найти)
- TW $> \mathcal{O}(\sqrt{k}) \Rightarrow$ есть большая клика $\Rightarrow$ есть большой разрез
- TW $\leq \mathcal{O}(\sqrt{k}) \Rightarrow$ решаем за $2^{\mathcal{O}(\mathsf{TW})}$

Трехдольные $|V| - 1 + k$



Общий случай сводится к трехдольному.
Нет алгоритмов эффективнее общего случая.

Трехдольные $2|E|/3 + k$ - сложность

Оценка использует покраску в 3 цвета.
Найти такую покраску NP-трудно.

Найти разрез $\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)|E|$ NP-трудно:

- Сведем NAE-3-SAT к поиску разреза на трехдольном графе
- Делаем искомый разрез размера $\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)|E|$

Трехдольные $2|E|/3 + k$ - алгоритм

Алгоритм $\frac{2}{3}|E|$:

- Сведем к линейной задаче
- Из-за трехдольности существует хороший ответ
- Восстановим разрез по решению

Ядро $|V| - 1 + k$

Ядро $\mathcal{O}(k)$ вершин и ребер на произвольных графах:

- Применим лемму[5], упрощающую структуру графа
- Упростим граф дальше
- Оценим суммарный размер компонент двусвязности
- Получаем линейное ядро вместо $\mathcal{O}(k^5)$

[5] Madathil et al., “Max-Cut Above Spanning Tree is Fixed-Parameter Tractable”, 2018.

Результаты

Класс	Алго	Оценка[6]
Хордальные	$2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$	$2^{\Omega(\sqrt{k})}$
Расщепляемые	$2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$	$2^{\Omega(\sqrt{k})}$
Кодвудольные	$2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$	$2^{\Omega(\sqrt[4]{k})}$
Трехдольные	общий случай	
Трехдольные $2\|E\|/3$	-	$2^{\Omega(k)}$

- На трехдольных графах можно найти разрез $\frac{2}{3}|E|$, но не $\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\right)|E|$.
- Найдено ядро размера $\mathcal{O}(k)$ в общем случае.

Планируется подать работу на IPEC 2021.

[6] в предположении гипотезы об экспоненциальном времени

- Ausiello, Giorgio et al. *Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*. Springer, 2003.
- Bhogavilli, S. K. and H. Abu-Amara. "Design and Analysis of High Performance Multistage Interconnection Networks". In: *IEEE Transactions on Computers* 40.01 (Jan. 1997), pp. 110–117.
- Bodlaender, Hans L. and Klaus Jansen. "On the complexity of the maximum cut problem". In: *STACS 94*. Ed. by Patrice Enjalbert et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1994, pp. 769–780.
- Edwards, C. S. "Some Extremal Properties of Bipartite Subgraphs". In: *Canadian Journal of Mathematics* 25.3 (1973), pp. 475–485.
- Etscheid, Michael and Matthias Mnich. "Linear Kernels and Linear-Time Algorithms for Finding Large Cuts". In: *Algorithmica* 80 (2018), pp. 2574–2615.

- Khot, Subhash et al. "Optimal Inapproximability Results for MAX-CUT and Other 2-Variable CSPs?" In: *SIAM Journal on Computing* 37.1 (2007), pp. 319–357.
- Kobayashi, Yasuaki et al. "An Improved Fixed-Parameter Algorithm for Max-Cut Parameterized by Crossing Number". In: *Combinatorial Algorithms*. Ed. by Charles J. Colbourn et al. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 327–338.
- Madathil, Jayakrishnan et al. "Max-Cut Above Spanning Tree is Fixed-Parameter Tractable". In: *Computer Science – Theory and Applications*. Ed. by Fedor V. Fomin and Vladimir V. Podolskii. Cham: Springer International Publishing, 2018, pp. 244–256.
- Mahajan, Meena and Venkatesh Raman. "Parameterizing above Guaranteed Values: MaxSat and MaxCut". In: *Journal of Algorithms* 31.2 (1999), pp. 335–354.

Другие результаты о Max-Cut

Оценка Эдвардса-Эрдёша известна с 1973 года[7].
NP-трудно решить, содержит ли граф разрез $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)|E|$[8].
Существует 0.878-приближение[9], являющееся оптимальным при UGC[10].

Задача решается за полиномиальное время на планарных графах и даже FPT относительно количества пересечений ребер в изображении графа[11].

---

[7] Edwards, "Some Extremal Properties of Bipartite Subgraphs", 1973.

[8] Bhogavilli and Abu-Amara, "Design and Analysis of High Performance Multistage Interconnection Networks", 1997.

[9] Ausiello et al., *Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*, 2003.

[10] Khot et al., "Optimal Inapproximability Results for MAX-CUT and Other 2-Variable CSPs?", 2007.

[11] Kobayashi et al., "An Improved Fixed-Parameter Algorithm for Max-Cut Parameterized by Crossing Number", 2019.

Ядро

Лемма

Или в G есть разрез $|V| - 1 + k$ или $\exists S \subset V$: в $G - S$ каждая компонента двусвязности – цикл или клика и $|S| \leq 3k$

- в компонентах связности $G - S$ с ≥ 3 ребрами в S всего $\mathcal{O}(k)$ ребер в S
- Листовые блоки без ребра в S удаляются
- В каждом блоке половина вершин имеют ребро вне блока.
- Оценим блоки со степенью ≥ 3
- Оценим блоки со степенью 2

Трехдольные $|V| - 1 + k$

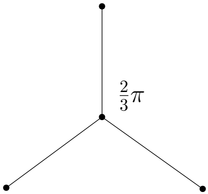
Сведем общий случай к трехдольным:
Подразобьем каждое ребро на три

Разрез $c \to c + 2|E|$
Оценка $|V| - 1 \to |V| - 1 + 2|E|$
Параметр не меняется

Трехдольные - алгоритм

Полуопределенное программирование

- $\min \lambda$
- $\forall a \in V \; |v_a| = 1$
- $\forall ab \in E \; \langle v_a, v_b \rangle \leq \lambda$



$\lambda_{OPT} \leq \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$
Плоскость разделяет ребро с $\Pr \geq \frac{2}{3}$