Разделение без зависти в социальных сетях с помощью скрытия информации

Буков Антон Алексеевич

научный руководитель: к.ф.-м.н. И.А. Близнец

НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург

8 июня 2021 г.

Задача о справедливом дележе

- Хотим разделить набор предметов между несколькими агентами справедливым образом
  - Предметы неделимы
  - Ценности неотрицательны, каждый может оценивать по-своему
  - Ценность набора – сумма ценностей предметов
- Данная задача возникает во множестве реальных ситуаций. Например, при разделении наследства и распределении радиочастот

Критерии справедливости:

- Отсутствие зависти (EF)[1]
  - Никто не предпочел бы обменяться наборами
- Пропорциональность (PROP)[2]
  - Каждый получил хотя бы $1/n$ от общей ценности предметов

[1] Foley, «Resource allocation and the public sector», 1967.
[2] Steinhaus, «Report of the Washington Meeting, September 6-18, 1947», 1948.

Релаксации

- EF и PROP распределения не всегда существуют
- Разрешим агентам скрывать предметы от других

Существующие критерии:

- EF1[3]
    - Каждый выбирает какой один предмет спрятать от другого
    - Иногда требуется скрыть много предметов
- HEF-k[4]
    - Выбирается набор из k скрываемых предметов
    - Ограничиваем число скрываемых предметов
    - Исключает недостатки EF1

[3] Budish, «The Combinatorial Assignment Problem: Approximate Competitive Equilibrium from Equal Incomes», 2011.

[4] Hosseini и др., «Fair Division through Information Withholding», 2020.

Борьба с NP-трудностью

NP-трудность

- Определить существование EF[5], PROP и HEF-k[6] распределений NP-трудно
- Не надеемся на полиномиальные алгоритмы

Параметризованная сложность

- Может быть, для какого-то параметра p, задачу можно решать за $f(p)n^{O(1)}$. Например, за $2^p n$.
- FPT (fixed-parameter tractable) относительно этого параметра

[5] Lipton и др., «On Approximately Fair Allocations of Indivisible Goods», 2004; Aziz и др., «Fair assignment of indivisible objects under ordinal preferences», 2014.

[6] Hosseini и др., «Fair Division through Information Withholding», 2020.

Социальные сети

- Можно ослабить существующие критерии, рассматривая социальные сети
  - EF: завидовать могут только соседи
  - PROP: все должно быть локально PROP
- Меньше ограничений $\Rightarrow$ решение могло начать существовать
- Более эффективные алгоритмы в зависимости от структуры социальной сети
- Существующие результаты:
  - EF распределения находятся за полиномиальное время на ациклических графах, NP-трудно на произвольных[7]
  - Задача становится FPT относительно некоторых параметров[8]

[7] Bredereck, Kaczmarczyk и Niedermeier, «Envy-Free Allocations Respecting Social Networks», 2018.

[8] Eiben и др., «Parameterized Complexity of Envy-Free Resource Allocation in Social Networks», 2020.

Предлагаемый подход

Предлагается обобщить предложенный Hosseini и др. подход со скрытием фиксированного числа предметов на графы агентов

- Решение всегда существует
  - В отличие от классических EF и PROP
- Может требоваться меньшее число скрытий, чем в обычном случае
- Более эффективные алгоритмы
  - Можно использовать различные структурные параметры (например, вершинное покрытие) для построения параметризованных алгоритмов

Цель и задачи

Цель: Изучить влияние социальных сетей на критерии со скрытием фиксированного числа предметов с точки зрения вычислительной сложности

Задачи:

- Привести оценки на число скрываемых предметов в худшем случае и определить, насколько трудно найти точную оценку
- Определить, насколько трудно находить такие распределения
- Определить, насколько трудно проверить, удовлетворяет ли распределение таким критериям

Критерии

Вход состоит из множества агентов A, множества предметов R, графа $G = (A, E)$ и функции оценки для каждого агента $\{\tau_a\}_{a \in A}$.
$\pi(a)$ — множество предметов агента a

Определение ($\textsc{Locally HEF}$-k)

Распределение π является $\textsc{Locally HEF}$-k, если существует множество $F \subseteq R$ размера не более k, такое что для любого $v \in A$ и $u \in N(v)$

$$\tau_v(\pi(v)) \geq \tau_v(\pi(u) \setminus F)$$

Для $\textsc{Locally uHEF}$-k дополнительно требуем $|F \cap \pi(v)| \leq 1$ для каждого $v \in A$.

Будем называть вершину (агента) *скрывающим*, если он имеет хотя бы один скрываемый предмет

Худший случай для Locally uHEF-k

Утверждение

Достаточно ли скрыть k предметов? $\Leftrightarrow$ Достаточно ли k скрытий для предметов ценностью $1 + 2^{-i}$?

- Назовем данные ценности *неуравнимыми*

Используя эту идею получаем:

- Всегда достаточно скрыть $\beta(G)$ предметов
- Параметризованные алгоритмы для нахождения достаточного числа скрытий

Алгоритм для Locally uHEF-k

Теорема

Существует алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$, который находит минимальное достаточное число скрытий для m предметов

$\mathcal{O}^*(f)$ означает с точностью до полиномиальных множителей

- Переберем множество агентов, скрывающих предмет
- Для фиксированного множества находим поиском в глубину максимальное число предметов, которое можно дать агенту
- Найдем минимальное подходящее множество

Трудность нахождения Locally uHEF-k

Теорема

Не существует алгоритма для нахождения Locally uHEF-k *распределений с временем работы* $2^{o(|A|+|R|+|E|)}$, *если* ETH *верна.*

Из ETH следует, что Vertex Cover нельзя решить за $2^{o(|V(G)|+|E(G)|)}$

- Ценности — $1 + 2^{-i}$
- Строим гаджет, который заставляет вершину иметь ≤ 3 предметов
- Подсоединим эту вершину ко всем вершинам из G
- Эта вершина имеет 3 предмета $\Rightarrow$ скрывающие образовывают вершинное покрытие размера k
- Она имеет < 3 предметов $\Rightarrow$ нельзя раздать достаточное число предметов

Предыдущий алгоритм за $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ оптимален в предположении ETH!

Трудность нахождения Locally HEF-k и Locally uHEF-k

Теорема

Найти Locally uHEF-k *и* Locally HEF-k *распределение* W[1]*-трудно относительно* k *и числа предметов* m*, даже если все ценности ограничены некоторой константой* t*.*

- W[1]-трудно = нет $f(p)n^{\mathcal{O}(1)}$ алгоритма, если верно FPT $\neq$ W[1]
- Сводим Clique к нашей задаче
- Clique параметризованная размером клики W[1]-полная
- Строим социальную сеть с агентами-вершинами и агентами-ребрами
- Хотим, чтобы скрывали только агенты-вершины
- На самом деле, не важно, кто скрывает

Трудность проверки распределений

- Был придуман параметризованный алгоритм для задачи проверки, удовлетворяет ли распределение критериям
- Показана $\mathrm{W}[1]$ и $\mathrm{W}[2]$-трудность для некоторых параметризаций
- Также, была изучена параметризованная сложность для критериев в духе PROP

Результаты

Были введены новые критерии справедливости и получено:

- Для числа скрытий в худшем случае:
  - Точная оценка на число скрываемых предметов
  - $\mathcal{O}^*(2^n)$ алгоритм для числа скрытий, его оптимальность при ETH
  - Параметризованные алгоритмы
- Про сложность нахождения распределений, удовлетворяющих введенным критериям:
  - $\mathrm{W}[1]$-трудность относительно k и числа предметов
  - Отсутствие субэкспоненциального алгоритма, предполагая ETH
- Про сложность проверки, удовлетворяет ли распределение введенным критериям:
  - Параметризованный алгоритм, $\mathrm{W}[1]$ и $\mathrm{W}[2]$-трудность относительно некоторых параметров

Критерии

Определение (LOCALLY HEF-k)

Распределение π *является* LOCALLY HEF-k, *если существует множество* $F \subseteq R$ *размера не более* k, *такое что для любого* $v \in A$ *и* $u \in N(v)$

$$\tau_v(\pi(v)) \geq \tau_v(\pi(u) \setminus F)$$

Определение (LOCALLY HPROP-k)

Распределение π *является* LOCALLY HPROP-k, *если существует множество* $F \subseteq R$ *размера не более* k, *такое что для любого* $v \in A$ *и*

$$\tau_v(\pi(v)) \geq \frac{1}{|N(v)|} \sum_{u \in N(v)} \tau_v(\pi(u) \setminus F)$$

Для LOCALLY uHEF-k и LOCALLY uHPROP-k дополнительно требуем $|F \cap \pi(v)| \leq 1$ для всех $v \in A$

Результаты Locally HEF-k и Locally uHEF-k

Число скрытий в худшем случае:

- Необходимо и достаточно скрыть $\beta(G)$ предметов
- Необходимо скрыть $\frac{m}{(\Delta(G)+1)\mathrm{diam}(G)}$ предметов (Locally uHEF-k)
- $\mathcal{O}^*(2^n)$ алгоритм для числа скрытий и его оптимальность при условии ETH
- FPT с параметром $k + tw(G)$ (Locally uHEF-k)
- FPT с параметром $k + cw(G)$ (Locally uHEF-k)

Обозначения:

- n – число агентов
- m – число предметов
- $tw(G)$ – древесная ширина G
- $cw(G)$ – кликовая ширина G

Результаты Locally HEF-k и Locally uHEF-k

Сложность нахождения распределений, удовлетворяющих введенным критериям:

- W[1]-трудность относительно $k + m$, даже с ограниченными ценностями
- Отсутствие субэкспоненциального алгоритма, предполагая ETH (Locally uHEF-k)

Сложность проверки, удовлетворяет ли распределение введенным критериям:

- W[2]-трудность относительно $tw(G)$, $\beta(G)$ и k (Locally HEF-k)
- FPT с параметром $T_R + tw(G)$ (Locally uHEF-k)

Обозначения:

- m – число предметов
- $tw(G)$ – древесная ширина G
- T_R – число типов предметов

Результаты Locally HPROP-k и Locally uHPROP-k

Сложность проверки, удовлетворяет ли распределение введенным критериям:

- W[2]-трудность относительно $\beta(G) + k$ (Locally HPROP-k)
- W[2]-трудность относительно k (Locally uHPROP-k)
- W[1]-трудность относительно $T_R + T_A + tw(G)$

Обозначения:

- m – число предметов
- $tw(G)$ – древесная ширина G
- T_R – число типов предметов
- T_A – число типов агентов

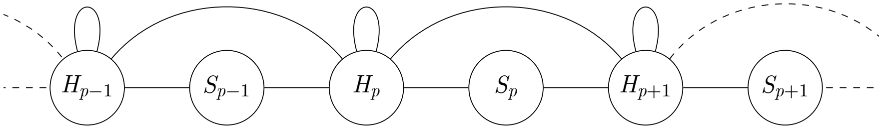
Способ раздачи

Пусть мы знаем про $\textsc{Locally uHEF-}k$ распределение m предметов следующие множества:

- S_i – множество вершин, имеющих i предметов
- H_i – множество вершин, имеющих i предметов и скрывающий один предмет

Тогда

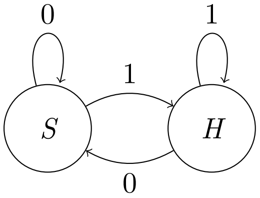
- Если в графе ребра только такого вида, то существует полиномиальная процедура, которая находит $\textsc{Locally uHEF-}k$ распределение.
- Для ценностей $1 + 2^{-i}$ ребра только такие:



Алгоритм для фиксированного H

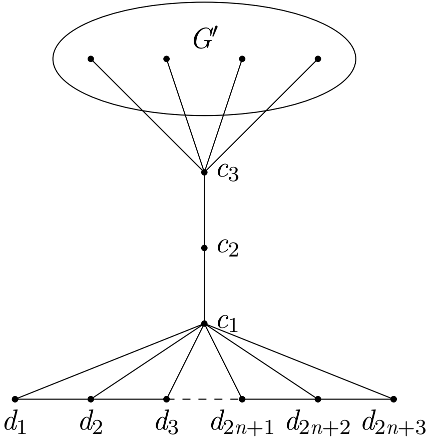
Идея алгоритма:

- Зададим вес ребрам как на картинке
- Найдем кратчайшие пути из множества вершин из $A \setminus H$, имеющих соседа в $A \setminus H$
- D_i — агенты на расстоянии i
- $H_i = D_i \cap H$
- $S_i = D_i \setminus H$



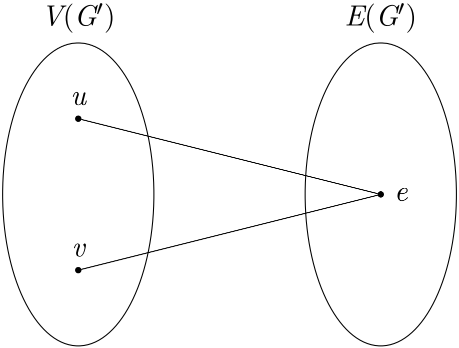
Сведение Vertex Cover

- Хотим раздать $3n + k + 6$ предметов
- Среди d_i найдутся 2 не скрывающих соседа
- c_i имеет не более i предметов
- Если среди d_i q скрывающих, то всего среди них $\leq 4q$ предметов
- Если c_i не имеет 3 предмета, то среди $V(G')$ не более $2n + k$ предметов



Построим вход для нашей задачи:

- $V(G')$ – клика
- $E(G')$ – независимое множество
- $e = (u, v)$, то в новом графе будут ребра (e, u) и (e, v)
- $k = k'$
- $m = k' + \binom{k'}{2}$



Сведение Clique

1. Для любого Locally uHEF-k и Locally HEF-k распределения m предметов на полученном графе существует Locally HEF-k распределение этих предметов, такое что скрывают предметы только агенты из $V(G')$.
2. Любое Locally HEF-k распределение $m = k' + \binom{k'}{2}$ этих предметов, такое что скрывают предметы только агенты из $V(G')$, является Locally uHEF-k.
3. Множество агентов, скрывающих предмет в Locally uHEF-k распределении $m = k' + \binom{k'}{2}$ этих предметов, является кликой размера k' в G'.

- Скрытый предмет у a_v соответствует цвету вершины
- b_v гарантирует, что скрыт ровно один предмет у a_v
- w_e^i гарантирует, что соседи одновременно не скрыли i-ый предмет
- f_i гарантирует, что скрыто ровно $\frac{n}{q}$ i-ых предметов