ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук

Буков Антон Алексеевич

РАЗДЕЛЕНИЯ БЕЗ ЗАВИСТИ С УЧЕТОМ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СКРЫТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Выпускная квалификационная работа - БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
по направлению подготовки *01.03.02 Прикладная математика и информатика*
образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

Рецензент
канд. физ.-мат. наук
О.И. Дугинов

Руководитель
канд. физ.-мат. наук
И.А. Близнец

Санкт-Петербург 2021

Оглавление

Аннотация

Задача о справедливом дележе является одной из основных задач теории социального выбора. В последнее время все больше работ начали так или иначе вводить социальные сети в классические критерии, такие как отсутствие зависти или пропорциональность, что позволило создать более эффективные алгоритмы для нахождения таких разделений. Другие работы рассматривают приближения, использующие скрытие предметов, так как в общем случае такие разделения могут не существовать. В данной работе вводятся новые критерии, которые объединяют идею со скрытием фиксированного числа предметов и социальные сети. Таким образом, появляется возможность лучше моделировать реальные ситуации и создавать более эффективные алгоритмы для некоторых классов графов, сохраняя при этом достижимость. Более того, благодаря структуре социальной сети требуется меньшее число скрытий, чем в стандартном случае. В данной работе также изучается параметризованная сложность задач, связанный с данными критериями. Были рассмотрены некоторые хорошо изученные структурные параметры, такие как древесная ширина и кликовая ширина, а также другие параметры, такие как число типов предметов и число типов агентов. Были определены случаи, при которых задачи становятся FPT, и случаи, при которых они W[1]-трудные или еще сложнее.

Ключевые слова: Справедливый дележ, параметризованная алгоритмы, W[1]-трудность, древесная ширина, кликовая ширина, точные алгоритмы.

Fair division is one of the main problems in computational social choice. Recently, there was a line of work that introduce social networks in the classic notion of envy-freeness and proportionality. Another line of work considered approximations of these classic notions, as such allocations might not exist in general. To address the limitations of both approaches we propose a novel fairness notion that combines social networks and the idea of hiding items. Considering social network allows achieving a lower number of hidings in the worst case. In this work, we also study the computational complexity of such allocations from a parameterized perspective. We consider some well-studied graph parameters such as treewidth, cliquewidth, and other parameters such as the number of item types and number of agent types. We identified cases when these problem becomes tractable and cases when these problem is W[1]-hard or above.

Keywords: Fair division, parameterized algorithms, W[1]-hardness, treewidth, cliquewidth, exact algorithms.

Введение

Задача о справедливом дележе заключается в разделении каких-то ресурсов между несколькими агентами, каждый из которых имеет свои предпочтения на части этих ресурсов. Данная задача встречается во множестве различных реальных ситуациях, таких как разделение наследства, составление расписаний, распределение радиочастот.

Существуют различные постановки данной задачи. Ресурсы могут быть делимыми или нет, предпочтения агентов могут быть как гомогенными, так и нет, агенты могут оценивать ресурсы как отрицательно, так и положительно. Существует несколько важных частных случаев. В случае, когда есть несколько гомогенных делимых ресурсов, это задача о справедливом дележе ресурсов. Если же ресурс один, а предпочтения гомогенны, то это задача о справедливом дележе торта (cake-cutting). Если же предпочтения отрицательны, то это задача о справедливом распределении обязанностей. В случае, когда предметы неделимы, это задача о справедливом распределении объектов. В данной работе мы будем рассматривать последний случай.

Чтобы назвать разделение справедливым, необходимы критерии справедливости. Одни из наиболее изученных критериев это отсутствие зависти (EF) и пропорциональность (PROP). В EF требуется, чтобы никакой агент не захотел бы обменяться наборами с другим агентов. В PROP требуется, чтобы каждый получил хотя бы среднюю ценность наборов всех остальных агентов.

К сожалению, в случае неделимых предметов, данные критерии бывают недостижимы. Например, нельзя разделить один предмет между несколькими агентами. Однако, зачастую нам может быть не так интересно справедливое разделение, может подойти и распределение, которое *почти* удовлетворяет критериям. Поэтому можно рассматривать релаксации классических критериев. Одна из существующих идей это разрешить агентам скрывать какую-то информацию о своих предметах. Один из критериев, который использует эту идею, называется отсутствие зависти с точностью до одного предмета (EF1). Распределение является EF1, если каждый агент предпочитает свой набор предметов набору другого агента без какого-то одного предмета. Данный критерий уже всегда достижим даже при достаточно слабых условиях на предпочтения.

К сожалению, EF1 не позволяет указать число скрываемых предметов. Поэтому он не позволяет отличить разделения, в которых требуется скрывать много предметов, от разделений, в которых требуется скрывать мало. Например, можно раздать одни и те же предметы разными способами так, что в одном случае требуется скрывать все предметы, а в другом только один. В обоих случаях распределения являются EF1, но в некотором смысле второе более справедливо. Чтобы побороться с этой проблемой, был предложен более сильный критерий *отсутствие зависти с точностью до k*

скрытых предметов HEF-k. В нем выбирается множество из k предметов, которые будут скрываться при сравнениях. Разделение является HEF-k, если каждый агент предпочитает свой набор набору любого другого агента, за исключением скрытых предметов. Данный критерий всегда достижим для какого-то k.

В классических критериях подразумевается, что агенты обладают полной информацией обо всех других агентах. Однако, во многих ситуациях можно предполагать, что какие-то агенты не знают друг о друге. Используя это предположение, можно ослабить существующие критерии. Например, для EF и PROP можно разрешить сравниваться только знакомым агентам. Таким образом мы получаем более локальные версии существующих критериев, которые включают в себя социальную сеть. Более того, такие ослабления позволяют более эффективно находить распределения в некоторых случаях. Известно, что многие NP-трудные задачи на графах допускают эффективные алгоритмы, когда граф является деревом. Другой подход это рассматривать различные параметры входа задачи, такие как размер минимального вершинного покрытия c. Возможно, что хоть и задача NP-трудная в общем случае, ее можно решать за время $\mathcal{O}(2^c n)$, что является линейным временем, если c константа.

Определения ключевых терминов

Задача о справедливом распределении предметов состоит из множества агентов A и множества предметов R. Каждый агент a имеет свою функцию оценки множества предметов $\tau_a : 2^R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Распределение это отображение $\pi : A \to 2^R$, такое что для любых двух агентов a и a' их наборы предметов $\pi(a)$ и $\pi(a')$ не пересекаются. Также, мы дополнительно требуем, чтобы распределение было полным, то есть $\bigcup_{a \in A} \pi(a) = R$.

Будем называть предпочтения идентичными, когда все агенты оценивают предметы одинаково. В данном случае у нас будет одна общая функция оценки $\tau : 2^R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предпочтения называются аддитивными, если для любого агента $a \in A$ и любых $R_1, R_2 \subseteq R$ верно $\tau_a(R_1) + \tau_a(R_2) = \tau_a(R_1 \cup R_2) + \tau_a(R_1 \cap R_2)$. В таком случае ценность набора определяется ценностью предметов в нем, т.е. $\tau_a(R') = \sum_{r \in R'} \tau_a(\{r\})$.

Будем говорить, что агенты $a, a' \in A$ одного типа, когда у них совпадают функции оценки, т.е. $\forall R' \subseteq R : \tau_a(R') = \tau_{a'}(R')$. За T_A будем обозначать число типов агентов. Будем говорить, что предметы $r, r' \in R$ одного типа, когда все агенты оценивают их одинаково, т.е. $\forall a \in A : \tau_a(r) = \tau_a(r')$. За T_R будем обозначать число типов предметов.

За $[k]$ будем обозначать множество $\{1, \ldots, k\}$. За $[a, b]$ будем обозначать множество $\{a, a+1, \ldots, b\}$.

За $vcn(G)$ будем обозначать размер минимального вершинного покрытия G.

Распределения без зависти Распределение π называется *распределением без зависти* (EF), если для любой пары агентов $a, a' \in A$ выполнено $\tau_a(\pi(a)) \geq \tau_a(\pi(a'))$. Распределение π называется *распределением без зависти с точностью до 1 предмета* (EF1), если для любой пары агентов $a, a' \in A$ найдется такой предмет $h \in \pi(a')$, что $\tau_a(\pi(a)) \geq \tau_a(\pi(a') \setminus \{h\})$. Распределение π называется *распределением без зависти с точностью до k скрытых предметов* (HEF-k), если существует такое множество предметов $S \subseteq R$ размера не более k, что для любой пары агентов $a, a' \in A$ верно $\tau_a(\pi(a)) \geq \tau_a(\pi(a') \setminus S)$

Будем говорить, что агент a завидует агенту a', если для него не выполняется неравенство, т.е. $\tau_a(\pi(a)) < \tau_a(\pi(a') \setminus S)$.

Пропорциональные распределения Распределение π называется *пропорциональным* (PROP), если для любого агента $a \in A$ верно $\tau_a(\pi(a)) \geq \frac{1}{|A|} \sum_{a' \in A} \tau_a(\pi(a'))$. Распределение π называется *пропорциональным с точностью до k скрытых предметов* (HPROP-k), если существует такое множество предметов $S \subseteq R$ размера не более k, что для любого агента $a \in A$ верно $\tau_a(\pi(a)) \geq \frac{1}{|A|} \sum_{a' \in A} \tau_a(\pi(a') \setminus S)$.

Будем говорить, что агент a неудовлетворен, если для него не выполняется неравенство, т.е. $\tau_a(\pi(a)) < \frac{1}{|A|} \sum_{a' \in A} \tau_a(\pi(a') \setminus S)$.

Древесная ширина Древесная декомпозиция это такая пара $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$, где T представляет собой дерево, с каждой вершиной которого ассоциировано некоторое подмножество вершин $X_t \subseteq V(G)$, называемое сумкой, для которой верно следующее:

1. $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$.

2. Для каждого ребра $\{u, v\} \in E(G)$ найдется такая вершина t, что $u, v \in X_t$.

3. Для любой вершины $v \in V(G)$ множество $T_u\{t \in V(T) \,|\, v \in X_t\}$ индуцирует связное дерево в T.

Ширина декомпозиции это $\max_{t \in V(T)} |X_t| - 1$. Древесная ширина, обозначаемая $tw(G)$, это минимальная возможная ширина древесной декомпозиции графа G.

За V_t будем обозначать объединение сумок всех сумок в поддереве t.

Кликовая ширина Кликовой шириной $cw(G)$ будем называть минимальное такое k, что граф G можно построить следующими четырьмя операциями, используя метки из $[k]$:

1. Непересекающееся объединение $\oplus$:

2. Соединение $\eta_{i,j}$: добавление ребер между каждой вершиной с меткой i и каждой вершиной с меткой j.

3. Переназначение $\rho_{i \to j}$: назначение всем вершинам с меткой i метки j.

4. Введение вершины $i(v)$: сделать граф, состоящий из единственной вершины с меткой i.

k-expression tree будем называть корневое дерево, которое показывает, как G был построен с помощью данных операций, используя k меток. В листьях данного дерева записаны операции $i(v)$. Операция $\oplus$ имеет двух потомков, остальные операции имеют ровно одного потомка. Кликовая ширина определена как в [1].

Параметризованная сложность Можно изучать сложность задач в зависимости от каких-то параметров. Приведем определения как в [2]. Параметризованные задачи отличаются от обычных тем, что на вход дополнительно подается параметр. Т.е. вход для параметризованной задачи это пара (x, k).

Параметризованная задача называется fixed-parameter tractable (FPT) относительно параметра k, если она допускает алгоритм с временем работы $\mathcal{O}(f(k)|x|^c)$ для какой-то функции f, не зависящей от x, и константы c, где x — вход задачи. Класс задач, допускающих такие алгоритмы, называется FPT.

Если алгоритм работает за время $\mathcal{O}(f(k)|x|^c)$, то будем писать, что алгоритм работает за время $\mathcal{O}^*(f(k))$. В каком-то смысле это означает "с точностью до полиномиальных множителей".

По аналогии с полиномиальной иерархией, существует иерархия параметризованных задач.

$$FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \cdots \subseteq W[P]$$

Точное определение данных классов в данной работе не понадобится, поэтому не приводится здесь. Для наших целей достаточно знать, что задачи в каждом классе замкнуты относительно параметризованной редукции.

Параметризованная редукция это алгоритм, который по входу (x, k) задачи A строит вход (x', k') задачи B, что верно следующее:

- Ответ на задачу A совпадает с ответом на задачу B.
- Время работы алгоритма $\mathcal{O}(f(k)|x|^c)$ для какой-то функции f и константы c.
- $k' < g(k)$ для какой-то функции g.

Чтобы показывать трудность задач мы будем опираться на гипотезу, что FPT $\neq$ W[1]. Таким образом, если мы покажем, что какая-то задача W[1]-трудная (т.е. для любой задачи из W[1] существует параметризованная редукция к нашей задаче), то это будет означать, что для нее не существует алгоритма с временем работы $\mathcal{O}(f(k)|x|^c)$.

Отметим, что можно также рассматривать несколько параметров. В таком случае вместо одного параметра k используется вектор параметров d. Однако, утверждается, что такое определение не вносит ничего нового, так как в некотором смысле задача с несколькими параметрами $d = (d_1, \ldots, d_l)$ эквивалентна задаче с одним параметром $k = d_1 + \cdots + d_l$.

Постановка задачи

В данной работе будет рассмотрено обобщение критериев HEF-k и HPROP-k на социальные сети. Социальная сеть задается графом $G = (A, E)$. Таким образом мы получим более локальные критерии. Будем называть распределение π *локальным распределением без зависти с точностью до k скрытых предметов* (Locally HEF-k), если существует такое множество предметов $F \subseteq R$ размера не более k, что для любых двух агентов $a \in A$ и $a' \in N(a)$ верно $\tau_a(\pi(a)) \geq \tau_a(\pi(a') \setminus F)$.

Распределение π называется *локально пропорциональным распределением с точностью до k скрытых предметов* (Locally HPROP-k), если существует такое множество предметов $F \subseteq R$ размера не более k, что для любого агента $a \in A$ верно $\tau_a(\pi(a)) \geq \frac{1}{|N(A)|} \sum_{a' \in N(A)} \tau_a(\pi(a') \setminus F)$. Для *равномерных* распределений (Locally uHEF-k и Locally uHPROP-k) дополнительно требуем $|F \cap \pi(a)| \leq 1$ для каждого агента $a \in A$.

Цель и задачи

Целью данной работы является изучение данных критериев с точки зрения вычислительной сложности.

- Привести оценки на k, при которых данные критерии всегда достижимы.
- Определить трудность нахождения для социальной сети числа k, для которого критерии всегда достижимы.
- Определить трудность нахождения разделений, удовлетворяющих введенным критериям.
- Определить трудность проверки, удовлетворяет ли данное разделение введенным критериям.

Для того чтобы ответить на данные вопросы, вводятся следующие задачи:

Locally HEF-k Existence	
Вход:	Набор агентов A, набор ресурсов R, предпочтения агентов $\{\tau_a\}_{a\in A}$, социальная сеть $G = (A, E)$.
Вопрос:	Существует ли Locally HEF-k распределение?

Locally HEF-k Verification	
Вход:	Набор агентов A, набор ресурсов R, предпочтения агентов $\{\tau_a\}_{a\in A}$, социальная сеть $G = (A, E)$ и распределение π.
Вопрос:	Существует ли такое множество скрываемых предметов F, что с таким множеством это разделение π становится Locally HEF-k?

Locally HEF-k Attainability	
Вход:	Набор агентов A, социальная сеть $G = (A, E)$, число предметов m.
Вопрос:	Верно ли, что Locally HEF-k распределение достижимо для любого набора из m предметов?

Аналогично определяются задачи для Locally HPROP-k, Locally uHEF-k и Locally uHPROP-k.

Структура работы

В главе 1 приведен обзор на существующие критерии и работы, использующие социальные сети.

В главе 2 приводятся оценки на число скрытий, и рассматриваются алгоритмы для нахождения данного числа.

Глава 3 посвящена задаче о нахождении разделений, удовлетворяющих критериям.

Глава 4 посвящена задаче об определении, удовлетворяет ли данное распределение критериям.

В последней главе оцениваются полученные результаты и приводятся возможные направления дальнейшей работы.

1. Обзор литературы

1.1. Критерии справедливости

Критерии EF и PROP были введены Foley и Steinhaus соответственно [3,4]. Lipton и др. показали, что найти EF распределения NP-трудно в случае неделимых предметов, даже когда все предпочтения идентичные и аддитивные, а агентов всего двое [5]. Аналогичное сведение будет работать и для PROP,так как в случае двух агентов EF и PROP эквивалентны. Позже Aziz и др. [6] доказали немного более сильное утверждение: данная задача NP-полна даже в случае бинарных предпочтений, т.е. когда каждый предмет оценивается в 0 или 1.

Так как EF и PROP распределения не всегда существуют, то требуются релаксации этих критериев. [7] был предложен критерий EF1, который является релаксацией EF. Этот критерий всегда достижим в случае аддитивных предпочтений и удовлетворяющие ему распределение может быть найдено простым полиномиальным алгоритмом. В этом алгоритме агенты рассматриваются по очереди в некотором порядке. Каждый раз агент забирает себе наиболее ценный для него предмет из оставшихся. Lipton и др. показали [5], что данный критерий достижим и в более общем случае: когда предпочтения монотонны, т.е. добавление предмета в набор не уменьшает его ценность. Также, они привели полиномиальную процедуру для нахождения таких распределений в данном случае. Было также показано, что всегда существуют не только EF1, но при этом и оптимальные по Парето распределения [8]. Данный подход со скрытием предметов как в EF1 оказался полезным на практике [9].

Hosseini и др. [10] обратили внимание на то, что EF1 недостаточно точный, чтобы различать распределения с небольшим числом скрытий от распределений с большим. Чтобы побороться с этой проблемой ими был введены новые более точные критерии HEF-k и uHEF-k, которые позволяют указать число скрываемых предметов. Таким образом они развили критерий sEF1 [11], который отличается от EF1 тем, что агентам теперь должны скрывать от других один и тот же предмет. Проведенные ими эксперименты показали, что существующие алгоритмы для нахождения EF1 распределения дают HEF-k распределения с небольшим числом скрытий, т.е. EF1 в некотором смысле достаточно пессимистичный. Также, в этой работе была изучена вычислительная сложность данных критериев. Было показано, что в отличие от EF1 распределений, находить такие распределения трудно. Так, было доказано, что находить HEF-k распределения NP-трудно для любого k. Также, была показана NP-трудность для проверки, является ли данное распределение HEF-k.

1.2. Социальные сети

В последнее время начали активно изучать различные вариации задач о справедливом дележе, тем или иным способом использующие графы. Так рассматривались распределения предметов, где на предметах задан граф, а выданные агентам наборы должны образовывать связную компоненту [12]. В других работах рассматриваются социальные сети агентов и с помощью них ослабляются существующие критерии, позволяя агентам сравниваться только со своими соседями. Abebe и др. [13] изучали как социальные сети влияют на классические EF и PROPв случае единственного разделимого гетерогенного ресурса (cake-cutting). В другой работе Bei и др. [14] рассматривали ту же самую задачу. В ней были приведены эффективные протоколы нахождения таких разделений для частных случаев графов.

В других работах рассматривался случай неделимых предметов. Так, в работе Bredereck и др. [15] было рассмотрено обобщение EF на социальные сети. В этой работе изучалась вычислительная сложность нахождения таких разделений на некоторых классах графов. Были рассмотрены ациклические, сильно связные и произвольные графы. Было показано, что при некоторых ограничениях задача решается за полиномиальное время на ациклических графах, но почти всегда NP-трудная на других классах. Также, рассматривалась параметризованные исходящей степенью, числом агентов и числом предметов версии задач. Было показано, что относительно двух последних задача является W[1]-трудной. В работе Eiben и др. [16] рассматривались иные параметры, такие как древесная и кликовая ширина, а также такие параметры как максимальное число предметов у каждого агента, число типов агентов, число типов предметов. Последние два параметра уже встречались ранее [17]. В данной работе было показано, что при фиксированных значениях данных параметров задача решается за полиномиальное время с помощью динамического программирования. Однако также было показано, что относительно древесной ширины, числа типов предметов, числа типов агентов и максимального числа предметов у агента данная задача является W[1]-трудной. Но если поменять древесную ширину на вершинное покрытие, то задача становится FPT. Таким образом показали, что их алгоритм не может быть существенно улучшен.

1.3. Выводы

Критерии с фиксированным числом скрываемых предметов исключают недостатки предыдущих критериев, такие как несуществование или скрытие большого числа предметов, но при этом связанные с ними задачи становятся NP-трудными. Данную проблему можно преодолеть, если рассматривать социальные сети и придумывать алгоритмы, которые пользуются структурой социальный сети, как это было сделано для других критериев. Таким образом, можно придумывать эффективные алгоритмы для данных критериев, сохраняя при этом их преимущества перед предыдущими.

2. Оценки на число скрытий

В [10] было показано, что HEF-$|A|-1$ распределения всегда достижимы, какими бы не были предпочтения агентов. Можно заметить, что $|A|-1$ это размер минимального вершинного покрытия клики на $|A|$ вершинах. Можно задаться вопросом, какое число скрытий достаточно в случае произвольного графа и для какого числа скрытий найдутся такие предпочтения, что справедливые распределения невозможны.

2.1. Верхная оценка на число скрытий

Сперва покажем что всегда достаточно скрывать $vcn(G)$ предметов, чтобы добиться Locally HEF-$vcn(G)$ и Locally uHEF-$vcn(G)$ распределений, не зависимо от предпочтений агентов.

Теорема 2.1. *Для любого графа G Locally uHEF-$vcn(G)$ распределения всегда достижимы.*

Доказательство. Приведем алгоритм, который находит данное распределения для любых входных данных. Пусть VC – минимальное вершинное покрытие графа G. Перенумеруем агентов так, что $a_1, a_2, \ldots, a_{vcn(G)} \in VC$, а $a_{vcn(G)+1}, a_{vcn(G)+2}, \ldots, a_n \in A \setminus VC$. Будем раздавать предметы вершинам в данном порядке по циклу, пока не останется неиспользованных предметов. Каждый раз будем давать вершине наиболее предпочтительный для нее предмет из оставшихся. После этого, будем скрывать первые предметы первых $vcn(G)$ агентов. Утверждается, что теперь никто никому не завидует. Рассмотрим пару агентов a_i и a_j, $i < j$. a_i не завидует a_j, так как $\tau_{a_i}(r_{i,k}) \geq \tau_{a_i}(r_{j,k})$ для любого k, т.е. a_i ценит свой k-ый предмет больше, чем k-ый предмет a_j. Это так, так как в момент выдачи этого предмета агенту a_i среди оставшихся предметов был как $r_{i,k}$, так и $r_{j,k}$, а мы выдавали наиболее предпочтительный для a_i предмет. Теперь покажем, что a_j не завидует a_i. Если между ними нет ребра, то все очевидно. Если же ребро есть, то $a_i \in VC$. В этом случае a_j не видит первый предмет a_i. По аналогичным соображениям $\tau_{a_j}(r_{j,k}) \geq \tau_{a_j}(r_{i,k+1})$ для любого k. После этого осталось просуммировать по всем k и получить неравенство на весь набор. □

Данная теорема так же говорит, что всегда достижимы и Locally HEF-$vcn(G)$ распределения.

2.2. Нижние оценки на число скрытий

Покажем теперь, что меньшего числа скрытий недостаточно. Для этого докажем, что если мы скрываем меньшее число предметов, то найдется такой набор предметов, что для них Locally uHEF-k распределение недостижимо. Для этого введем особые предпочтения.

Определение 2.1 (Неуравнимые предпочтения). *Рассмотрим набор $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ из m предметов, где r_i каждый агент оценивает в $1 + 2^{-i}$. Будем называть данные предпочтения* ***неуравнимыми****.*

Данные предпочтения хороши тем, что невозможно выбрать два непересекающихся подмножества данных предметов с одинаковой ценностью.

Замечание 2.0.1. *В определении функции оценки говорилось, что ее кодомен это $\mathbb{N} \cup \{0\}$, но мы только что определили неуравнимиые предпочтения с помощью каких-то рациональных чисел. В таких случаях можно нормализовать предпочтения, домножив их на наибольший общий делитель знаменателей дробей. В случае неуравнимых предпочтений можно считать, что все домножено на 2^m.*

Далее нам потребуются следующие леммы:

Лемма 2.1. *Пусть у нас неуравнимые предпочтения. Тогда для любых двух непустых $R_1, R_2 \subseteq R$, таких что $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, верно*

1. *Если $|R_1| = |R_2|$, то $\tau(R_1) > \tau(R_2)$ тогда и только тогда, когда $i < j$, где i — минимальный такой индекс, что $r_i \in R_1$, а j — минимальный такой индекс, что $r_j \in R_2$.*

2. *Если $|R_1| > |R_2|$, то $\tau(R_1) > \tau(R_2)$.*

3. *Если $|R_1| < |R_2|$, то $\tau(R_1) < \tau(R_2)$.*

Доказательство. Заметим, что для любого конечного $I \subset \mathbb{N}$ верно

$$\sum_{i \in I, i > k} 2^{-i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k}. \tag{1}$$

Рассмотрим $R' \subseteq R$. Можно оценить значение $\tau(R')$ как

$$|R'| \leq \sum_{i \in R'} 1 + 2^{-i} < |R'| + 1.$$

Получаем, что если $|R_1| > |R_2|$, то $\tau(R_1) > \tau(R_2)$.

Теперь предположим, что $|R_1| = |R_2|$. Рассмотрим минимальный индекс предмета $r_i \in R_1$. Не умаляя общности, можно предположить $i < j$ для каждого $r_j \in R_2$. Тогда по (1) имеем $\sum_{j \in R_2} 2^{-j} < 2^{-i}$, следовательно, $\tau(R_1) > \tau(R_2)$. □

Лемма 2.2. *Для любого* Locally uHEF-k *распределения предметов с неуравнимыми предпочтениями верно, что для любых двух соседних агентов a, a' выполнено $||\pi(a)| - |\pi(a')|| \leq 1$. Более того, для любой пары агентов a и a' выполняется $||\pi(a)| - |\pi(a')|| \leq dist(a, a')$, где $dist(a, a')$ — расстояние между a и a' в G или ∞, если эти агенты несвязны.*

Доказательство. Рассмотрим два соседних агента a, a'. Предположим, не умаляя общности, что $|\pi(a)| - |\pi(a')| > 1$. Тогда

$$\sum_{r \in \pi(a')} \tau(\{r\}) < |\pi(a')| + 1 \leq |\pi(a)| - 1 < \sum_{r \in \pi(a) \setminus \{r'\}} \tau(\{r\})$$

для любого $r' \in \pi(a)$. Следовательно, это распределение не Locally uHEF-k.

Рассмотрим теперь любых двух несоседних агентов a, a' и путь между ними $a_1, a_2, \ldots, a_p$ минимальной длины. Пусть $||\pi(a)| - |\pi(a')|| > \mathrm{dist}(a, a')$. Тогда существуют две соседние вершины на пути a_i и a_{i+1}, для которых $||\pi(a_i)| - |\pi(a_{i+1})|| > 1$. Это противоречит предыдущему случаю. □

Лемма 2.3. *Для любого* Locally HEF-k *распределения предметов со связным G и неуравнимыми предпочтениями, такого что существует агент $z \in A$ с $\pi(z) = \emptyset$, верно, что для любого агента a $|\pi(a)| \leq k$.*

Доказательство. Пусть существует агент a с $|\pi(a)| \geq k+1$. Рассмотрим простой путь $a = a_1, a_2, \ldots, a_l = z$ от a до z. Докажем, что если $|\pi(a_i)| > |\pi(a_{i+1})|$, то a_i имеет хотя бы $|\pi(a_i)| - |\pi(a_{i+1})|$ скрытых предметов. Пусть это не так и a_i имеет меньше, тогда a_{i+1} видит у a_i хотя бы на 1 предмет больше, чем у себя и по лемме 2.1 завидует ему. Тогда получаем, что суммарно агенты $a_1, \ldots, a_l$ скрывают хотя бы $k+1$ предмет. Получили противоречие. □

Теперь мы готовы доказать, что меньше $vcn(G)$ в общем случае скрывать нельзя.

Теорема 2.2. *Для любого связного G и $k < vcn(G)$ есть такой набор предметов и предпочтения, что для них не существует* Locally HEF-k *распределения.*

Доказательство. Рассмотрим набор из $m = |A|^2$ предметов и неуравнимые предпочтения. Пусть есть какой-то агент e, которому не достался ни один предмет. Рассмотрим путь минимальной длины от этого агента до агента a с максимальным числом предметов. У этого агента должно быть хотя бы $|A|$ предметов по принципу Дирихле. По лемме 2.3 должно быть скрыто хотя бы $|A|$ предметов, но $|A| \geq vcn(G) > k$ — противоречие.

Если же каждый агент имеет хотя бы по предмету, то так как $k < vcn(G)$, то найдутся два соседних агента a, a', каждый из которых не имеет скрытых предметов. Но тогда должно быть $\tau(\pi(a)) = \tau(\pi(a'))$, что противоречит лемме 2.1. □

Данная теорема также говорит о том, что не существует и Locally uHEF-k распределения, так как любое Locally uHEF-k распределение является и Locally HEF-k.

До этого мы предполагали, что число предметов может быть любым. Теперь можно задаться вопросом, а сколько скрытий необходимо в случае, когда у есть ровно m предметов.

Теорема 2.3. *Для любого связного G, если* Locally uHEF-k *распределение m предметов всегда существует, то* $k \geq \min\{\frac{m}{(\Delta(G)+1)diam(G)}, vcn(G)\}$.

Доказательство. Сперва заметим, что по теореме 2.1, если $k \geq vcn(G)$, то распределение всегда существует. Будем рассматривать случай $k < vcn(G)$. Рассмотрим неуравнимые предпочтения. Найдется хотя бы одна вершина без предметов, так как найдется хотя бы одно ребра, у которого концы не имеют скрытых предметов. А если две соседние вершины не имеют скрытых предметов, то единственный способ их уравнять это не давать им предметы. Тогда у каждой вершины есть не более $\mathrm{diam}(G)$ предметов по лемме 2.2. Заметим, что каждая вершина, у которой есть предметы и нет скрытого предмета, обязана иметь соседа со скрытым предметом. Каждая вершина со скрытым предметом имеет не более $\Delta(G)$ соседей, имеющих предметы, но без скрытого предмета. Итого, всего вершин с предметами тогда не более $k \cdot (\Delta(G)+1)$, а всего предметов $m \leq k \cdot (\Delta(G)+1)\mathrm{diam}(G)$. Отсюда получаем нужное неравенство. □

2.3. Нахождение достаточного числа скрытий

В данном параграфе приводятся алгоритмы для задачи Locally uHEF-k Attainability. Для начала введем обозначения для некоторых подмножеств агентов.

Определение 2.2 (Классы агентов). *За $H_i = \{h_{i,1}, h_{i,2}, \ldots, h_{i,|H_i|}\}$ обозначим множество агентов, у которых есть ровно i предметов и ровно один из них скрытый. За $S_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,|S_i|}\}$ обозначим множество агентов, у которых есть ровно i предметов и нет скрытых предметов. Отметим, что $H_0 = \emptyset$ и S_0 — множество агентов без предметов. Определим еще $H = \bigcup_{i\geq 0} H_i$ и $S = \bigcup_{i\geq 0} S_i$. Будем называть агентов из H скрывающими, а агентов из S нескрывающими.*

Следующая лемма приводит способ раздачи предметов для любых предпочтений.

Лемма 2.4. *Пусть все агенты разбиты на классы так, что в G есть ребра только следующего вида:*

1. *Ребра между агентами из H_p*
2. *Ребра между агентами из H_p и H_{p+1}*
3. *Ребра между агентами из H_p и S_p*
4. *Ребра между агентами из S_p и H_{p+1}*

Тогда за полиномиальное время можно найти Locally uHEF-$|H|$ *распределение m предметов для любых предпочтений, где $m = \sum_i (|H_i| + |S_i|) \cdot i$.*

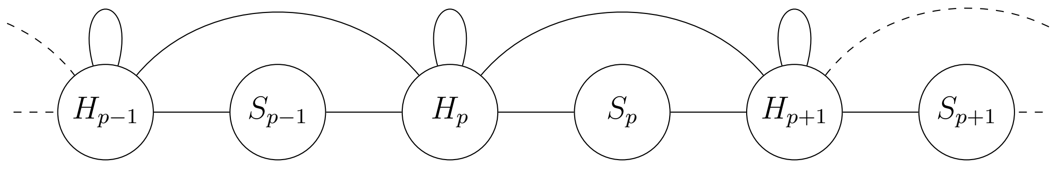

Рис. 1: Типы ребер в графе. Ребро между классами означает, что в графе может быть ребро между вершинами из данных классов.

Доказательство. Возьмем максимальное такое k, что одно из S_k и H_k не пустое. Выполним k шагов начиная с 1. На r-ом шаге будем давать каждому агенту наиболее предпочтительный для него предмет из оставшихся в следующем порядке:

$$h_{k,1}, h_{k,2}, \ldots, h_{k,|H_k|}, h_{k-1,1}, h_{k-1,2}, \ldots, h_{k-1,|H_{k-1}|}, \ldots, h_{r,1}, h_{r,2}, \ldots, h_{r,|H_r|},$$
$$s_{k,1}, s_{k,2}, \ldots, s_{k,|S_k|}, s_{k-1,1}, s_{k-1,2}, \ldots, s_{k-1,|S_{k-1}|}, \ldots, s_{r,1}, s_{r,2}, \ldots, s_{r,|S_r|}$$

Множеством скрытых предметов будут первые предметы у агентов из H. Таким образом мы получим какое-то распределение π. За $r_{a,i}$ обозначим i-ый в порядке получения предмет агента a. Утверждается, что при таком распределении никакие соседние агенты не завидуют друг другу. Чтобы это доказать рассмотрим ребра каждого вида:

Ребра между агентами из H_i: Рассмотрим $h_{p,i}, h_{p,j} \in H_p$, где $i < j$.

$h_{p,i}$ не завидует $h_{p,j}$, так как $\tau_{h_{p,i}}(\{r_{h_{p,i},l}\}) \geq \tau_{h_{p,i}}(\{r_{h_{p,j},l}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p,i}}(\pi(h_{p,i})) \geq \tau_{h_{p,i}}(\pi(h_{p,j}))$.

$h_{p,j}$ не завидует $h_{p,j}$, так как $\tau_{h_{p,j}}(\{r_{h_{p,j},l}\}) \geq \tau_{h_{p,j}}(\{r_{h_{p,i},l+1}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p,j}}(\pi(h_{p,j})) \geq \tau_{h_{p,j}}(\pi(h_{p,i}) \setminus \{r_{h_{p,i},1}\})$.

Ребра между агентами из H_p и H_{p+1}: Рассмотрим $h_{p,i} \in H_p$, $h_{p+1,j} \in H_{p+1}$.

$h_{p,i}$ не завидует $h_{p+1,j}$, так как $\tau_{h_{p,i}}(\{r_{h_{p,i},l}\}) \geq \tau_{h_{p,i}}(\{r_{h_{p+1,j},l+1}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p,i}}(\pi(h_{p,i})) \geq \tau_{h_{p,i}}(\pi(h_{p+1,j}) \setminus \{r_{h_{p+1,j},1}\})$.

$h_{p+1,j}$ не завидует $h_{p,i}$, так как $\tau_{h_{p+1,j}}(\{r_{h_{p+1,j},l}\}) \geq \tau_{h_{p+1,j}}(\{r_{h_{p,i},l}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p+1,j}}(\pi(h_{p+1,j})) \geq \tau_{h_{p+1,j}}(\pi(h_{p,i}))$.

Ребра между агентами из H_p и S_p: Рассмотрим $h_{p,i} \in H_p$, $s_{p,j} \in S_p$.

$h_{p,i}$ не завидует $s_{p,j}$, так как $\tau_{h_{p,i}}(\{r_{h_{p,i},l}\}) \geq \tau_{h_{p,i}}(\{r_{s_{p,j},l}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p,i}}(\pi(h_{p,i})) \geq \tau_{h_{p,i}}(\pi(s_{p,j}))$.

$s_{p,j}$ не завидует $h_{p,i}$, так как $\tau_{s_{p,j}}(\{r_{s_{p,j},l}\}) \geq \tau_{s_{p,j}}(\{r_{h_{p,i},l+1}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{s_{p,j}}(\pi(s_{p,j})) \geq \tau_{s_{p,j}}(\pi(h_{p,i}) \setminus \{r_{h_{p,i},1}\})$.

Ребра между агентами из H_{p+1} и S_p: Рассмотрим $h_{p+1,i} \in H_{p+1}$, $s_{p,j} \in S_p$.

$h_{p+1,i}$ не завидует $s_{p,j}$, так как $\tau_{h_{p+1,i}}(\{r_{h_{p+1,i,l}}\}) \geq \tau_{h_{p+1,i}}(\{r_{s_{p,j,l}}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{h_{p+1,i}}(\pi(h_{p+1,i})) \geq \tau_{h_{p+1,i}}(\pi(s_{p,j}))$.

$s_{p,j}$ не завидует $h_{p+1,i}$, так как $\tau_{s_{p,j}}(\{r_{s_{p,j,l}}\}) \geq \tau_{s_{p,j}}(\{r_{h_{p+1,i,l+1}}\})$ для любого l, и, следовательно, $\tau_{s_{p,j}}(\pi(s_{p,j})) \geq \tau_{s_{p,j}}(\pi(h_{p+1,i}) \setminus \{r_{h_{p+1,i,1}}\})$. □

Лемма 2.5. *В любом распределении предметов с неуравнимыми предпочтениями ребра только такие, как в лемме 2.4.*

Доказательство. Пусть есть два соседних агента, у которых число предметов отличается хотя бы на два. Тогда даже если у кого-то из них есть скрытый предмет, то кто-то из них будет видеть у другого на один предмет больше, чем у себя. Тогда по лемме 2.1 он будет завидовать. По этой же лемме любые два агента, у которых нет скрытых предметов, не могут быть соседними. Остался случай ребра между H_p и S_{p+1}. В данном случае первый агент видит у другого больше предметов, чем у себя, а значит завидует по той же лемме. □

Лемма 2.6. *G допускает* Locally uHEF-k *распределение m предметов с неуравнимыми предпочтениями эквивалентно том, что G допускает* Locally uHEF-k *распределение m предметов с любыми предпочтениями.*

Доказательство. В обратную сторону доказательство очевидно: если G допускает с любыми, то допускает и с неуравнимыми.

Если же G допускает распределение с неуравнимиыми, то по лемме 2.5 ребра в G удовлетворяют условию леммы 2.4. Следовательно, можно распределить такое же количество предметов с любыми предпочтениями. □

Таким образом Locally uHEF-k Attainability эквивалентна Locally uHEF-k Existence с неуравнимыми предпочтениями.

Используя эту лемму можно придумать алгоритм для нахождения максимального m, для которого Locally uHEF-k распределения всегда достижимы. Заметим, что для неуравнимых предпочтений теперь можно не думать о конкретных предметах, которые получает агент: достаточно знать в какой класс он попал. Это верно, так как по любому распределению таких предметов можно построить хорошее распределение по классам, а по любому хорошему распределению по классам можно построить распределение таких предметов. Получается, что если мы хотим максимизировать число предметов, то можно максимизировать $\sum_i(|H_i| + |S_i|) \cdot i$.

Теорема 2.4. *Пусть известно множество H. Тогда за полиномиальное время можно найти максимальное число предметов m, что* Locally uHEF-$|H|$ *распределения с таким множеством H всегда достижимы.*

Доказательство. Будем искать максимальное число предметов для неуравнимых предпочтений. Исходя из леммы 2.5, это даст нам максимальное число предметов для любых предпочтений.

По графу социальной сети $G = (A, E)$ построим новый взвешенный ориентированный граф $G' = (A, E')$ на том же наборе агентов. Рассмотрим ребро $\{u, v\} \in E$.

- Если $u, v \in H$, то добавим два ребра (u, v) и (v, u) веса 1 в G'.
- Если $u, v \notin H$, то добавим два ребра (u, v) и (v, u) веса 0 в G'
- Если $u \in H$ и $v \notin H$, то добавим ребро (v, u) веса 1 и (u, v) веса 0 в G'.

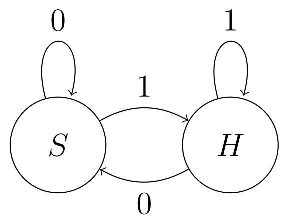

Рис. 2: Ребра в построенном графе. Над ребрами написан их вес.

Выберем агентов из $A \setminus H$, у которых есть сосед в $A \setminus H$ и посчитаем кратчайшие расстояния от множества этих агентов до всех остальных. Если же таких агентов нет, то H образует вершинное покрытие в G. В этом случае можно распределить любое число предметов как в теореме 2.1.

Пусть D_i —множество агентов из A на расстоянии i в графе G'. Докажем, что $H_i = D_i \cap H$ и $S_i = D_i \cap (A \setminus H)$ в каком-то распределении наибольшего числа предметов с любыми предпочтениями агентов.

Докажем индукцией по расстоянию от выделенного множества. Сперва покажем, что

$$H_0 = D_0 \cap H,\, S_0 = D_0 \cap (A \setminus H).$$

$H_0 = \emptyset$ так как каждый агент из H должен иметь хотя бы один скрытый предмет. $D_0 \cap H = \emptyset$, так как $D_0 \subseteq A \setminus H$. $S_0 \subseteq A \setminus H$, и если агент a из S_0 имеет соседей только из H, то его соседи имеют ровно один предмет.

Теперь предположим, что

$$H_i = D_i \cap H,\, S_i = D_i \cap (A \setminus H)$$

для всех $i \leq p$.

Обозначим за $H_{\leq p} = \bigcup_{i \leq p} H_i$, $S_{\leq p} = \bigcup_{i \leq p} S_i$. Заметим, что все соседи H_p и S_p, не лежащие в $H_{\leq p} \cup S_{\leq p}$ и лежащие в H, лежат в H_{p+1}. Предположим, что есть какой-то агент $a \in H_{p+1}$, у которого нет соседей из $H_p \cup S_p$. Тогда все его соседи лежат в $H_{p+1} \cup S_{p+1} \cup H_{p+2}$. Но тогда можно переместить a в H_{p+2}, не добавив при этом плохих ребер, и увеличить тем самым число предметов. Отсюда получаем, что $H_{p+1} = D_{p+1} \cap H$. Теперь докажем, что $S_{p+1} = D_{p+1} \setminus H_{p+1}$. Так как мы уже определили H_p, S_p, H_{p+1}, то среди соседей агентов из H_{p+1} остались только агенты из S_{p+1} и H_{p+2}.

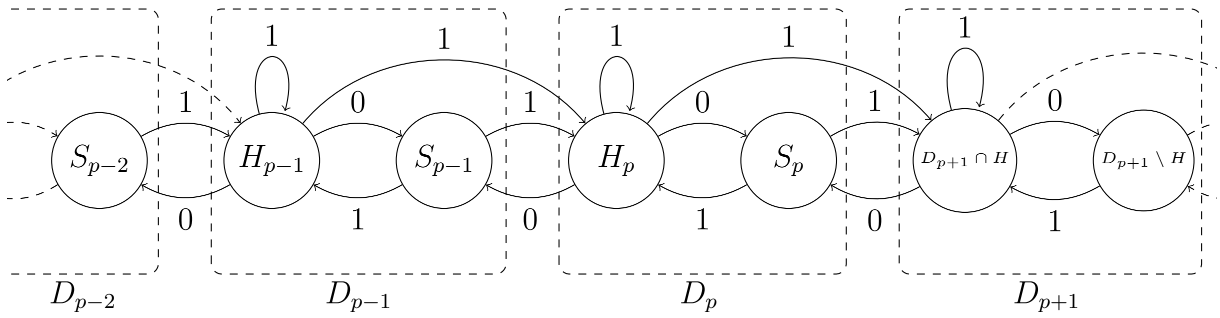

Рис. 3: Иллюстрация к доказательству

С другой стороны, каждый агент из S_{p+1} должен иметь хотя бы одного соседа из H_{p+1}. Если это не так, то можно переместить этого агента в S_{p+2}, чем увеличить число предметов. Теперь так как из H в S идут ребра веса 0, то все вершины из S_{p+1} находятся на таком же расстоянии, что и H_{p+1}. Поэтому $S_{p+1} = D_{p+1} \setminus H_{p+1}$.

Таким образом, мы получили разбиение на классы, при котором число предметов максимально. Тогда при таком разбиении достигается и максимум для неуравнимых предпочтений. В противном случае можно было бы по распределению с большим числом предметов получить более оптимальное распределение на классы. Следовательно, по лемме 2.5 это максимальное число предметов для любых предпочтений. $\square$

Используя эту теорему, можно получить алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ для Locally uHPROP-k Attainability. Для этого нужно перебрать все возможные H и найти тот, для которого максимальное число предметов больше чем m. Более того, мы можем заранее предподсчитать это множество H и потом эффективно строить распределения. Это может быть полезно в случае, когда заранее известно, что придут какие-то m предметов, но не известно, как агенты их оценивают.

Данный алгоритм за $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ перебирает все возможные множества. Используя некоторые структурные параметры, эту задачу можно избежать полного перебора и решать ее эффективнее.

Далее нам понадобится специальный случай древесной декомпозиции, а именно *хорошая древесная декомпозиция.*

Определение 2.3 (Хорошая древесная декомпозиция)**.** *Древесная декомпозиция* $(T, \{X_t\}_{t\in V(T)})$ *называется* хорошей*, если выполнены следующие условия:*

- $X_r = \emptyset$ *и* $X_l = \emptyset$ *для любого листа* l *в* T.
- *Каждый не листовой узел бывает одного из трех типов:*

  Вводящий узел *Узел* t*, у которого есть ровно один потомок* t'*, такой что* $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$ *для какой-то вершины* $v \notin X_t$.

Забывающий узел *Узел t, у которого есть ровно один потомок t', такой что $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$ для какой-то вершины $v \in X_{t'}$.*

Сливающий узел *Узел t, у которого есть ровно два потомка t_1 и t_2, такие что $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.*

Теорема 2.5. *Пусть древесная ширина G не превосходит w. Тогда найти такое максимальное m, что* Locally uHEF-k *распределения m предметов всегда достижимы, можно за время $\mathcal{O}^*(2^{(2k+1)(w+1)}k^3w)$, если на вход дополнительно дается хорошая древесная декомпозиция G ширины w*

Доказательство. Сперва проверим, что не существует вершинного покрытия какой-то из компонент связности G размера k, так как если оно существует, то такие распределения всегда достижимы по 2.1. Это можно сделать за $\mathcal{O}^*(2^w w^{\mathcal{O}(1)})$ с помощью динамического программирования (следствие 7.6 из [18]).

Рассмотрим хорошую древесную декомпозицию G с корневым узлом r. Для каждого агента в сумке будем запоминать какому из классов $H_1, H_2, \ldots, H_k, S_0, S_2, \ldots, S_k$ он принадлежит. Для этого будем хранить отображение $f : X_t \to \{\hat{H}_1, \ldots, \hat{H}_k, \hat{S}_0, \ldots, \hat{S}_k\}$. Будем называть эту информацию распределением по классам. Будем назвать такое распределение по классам f локально корректным, если все ребра внутри сумки принадлежат одному из 4 видов в лемме 2.4. Всего таких функций не более $2^{(2k+1)(w+1)}$, тогда всего состояний для каждого узла $\mathcal{O}(2^{(2k+1)(w+1)}k)$.

За $f|_X$ обозначим сужение функции на множество X. За $f_{a\to c}$ обозначим расширение функции с доменом X на множество $X \cup \{a\}$, такое что $f(a) = c$.

Пусть $dp_t[h, f]$ — максимальное число предметов, такое что существует какое-то распределение агентов V_t по классам, которое совпадает с f на X_t, и ровно h агентов из V_t принадлежат H, или $-\infty$, если оно не существует.

Доказательство здесь проводится индукцией по глубине узла. Базовый случай — листовые узлы.

Листовой узел. Если t является листовым узлом, то $dp_t[0, \emptyset] = 0$, все остальное равно $-\infty$.

Вводящий узел. Пусть t является вводящим узлом с потомком t' и $X_t = X_{t'} \cup \{a\}$. Пусть f — любое локально корректное распределение агентов из X_t по классам. Тогда

$$dp_t[h, f] = \begin{cases} dp_{t'}[h, f|_{X_{t'}}] + i & \text{если } f(a) = S_i \\ dp_{t'}[h-1, f|_{X_{t'}}] + i & \text{если } f(a) = H_i \end{cases}$$

Очевидно, что $dp_t[h, f]$ не меньше. Предположим, что $dp_t[h, f]$ больше этого значения. Тогда можно взять оптимальное распределение f' агентов из V_t по классам, совпадающее с f на X_t, убрать агента a и получить какое-то распределение по классам агентов из $V_{t'}$, совпадающее с $f|_{X_{t'}}$ на $X_{t'}$. Но тогда мы некорректно пересчитали состояния для t' — противоречие.

Все состояния можно пересчитать за $\mathcal{O}^*(2^{(2k+1)(w+1)}k)$.

Забывающий узел. Пусть t является забывающим узлом с потомком t' и $X_t = X_{t'} \setminus \{a\}$. Пусть f — любое локально корректное распределение агентов X_t по классам. Тогда

$$dp_t[h,f] = \max\{dp_{t'}[h, f_{a\to c}] \,|\, c \in C, f_{a\to c} \text{ локально корректно на } X_{t'}\}$$

Снова предположим, что $dp_t[h,f]$ больше. Тогда можно взять оптимальное распределение и посмотреть на распределение по классам f' агентов из $X_{t'}$. Этот вариант должен был присутствовать в максимуме, поэтому мы получаем противоречие с корректностью $dp_{t'}[h,f']$.

Все состояния можно пересчитать за $\mathcal{O}^*(2^{(2k+1)(w+1)}k)$ перебрав все возможные состояния для t' и проверив локальную корректность.

Сливающий узел. Пусть t сливающий узел с потомками t_1 и t_2, $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$. Пусть f — любое локально корректное распределение агентов по классам. Тогда

$$dp_t[h,f] = \max\{dp_{t_1}[h_1,f] + dp_{t_2}[h_2,f] \; - w(f) \,|\, h_1 + h_2 = h + |f^{-1}(\{H_1,\ldots,H_k\})|\}$$

где $w(f)$ — число предметов среди X_t с распределением по классам f. Предположим, что $dp_t[h,f]$ больше. Тогда возьмем оптимальное распределение в V_t с такими k и f и посмотрим на V_{t_1} и V_{t_2}. Тогда получаем, что для одного из них существует более оптимальное распределение агентов, чем мы нашли.

Все состояния можно пересчитать за $\mathcal{O}^*(2^{(2k+1)(w+1)}k^3w)$ перебрав все возможные f, h, h_1, h_2 и проверив равенство. Итого, ответ это $dp_r[h,\emptyset]$, что соответствует распределению по классам всех агентов из A.

Итого получаем алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{(2k+1)(w+1)}k^3w)$. □

Известно, что хорошая древесная декомпозиция ширины $tw(G)$ с $\mathcal{O}(tw(G)\cdot|V(G)|)$ узлами может быть посчитана за время $\mathcal{O}^*(f(tw(G)))$ [19]. Отсюда получаем, что Locally uHEF-k Attainability является FPT относительно $tw(G)$ и k.

Далее рассмотрим параметризацию, использующую кликовую ширину. Данные параметризация хороша тем, что позволяет эффективно решать задачу на плотных графах.

Теорема 2.6. *Пусть кликовая ширина G не превосходит w. Тогда найти такое максимальное m, что* Locally uHEF-k *распределения m предметов всегда достижимы, можно за время $\mathcal{O}^*(16^{kw}k^3w)$, если дополнительно на вход подается w-expression tree графа G.*

Доказательство. Сперва проверим, есть ли у какой-то компоненты связности G вершинное покрытие размера k. Это можно сделать за $\mathcal{O}^*(2^k)$ с помощью просто ветвления. Если такое вершинное покрытие есть, то по лемме 2.1 можно раздать любое число предметов. Если же нет, то пользуемся тем, что тогда в каждой компоненте связности найдется вершина с 0 предметов, а значит каждая вершина может иметь не более k предметов.

Рассмотрим w-expression tree графа G. Будем использовать динамическое программирование. Для каждого узла w-expression tree будем дополнительно запоминать, в каких классах лежать вершины с каждой меткой, с помощью функции $s : [w] \to 2^{\{\hat{H}_1,\ldots,\hat{H}_k,\hat{S}_0,\ldots,\hat{S}_k\}}$. Число таких функций не превосходит $(2^{2k+1})^w$.

Пусть $dp_t[s,h]$ — максимальное число предметов, которое можно раздать вершинам $V(G_t)$, так, что ровно h вершин принадлежат H, а вершины с меткой i лежат в классах $s(i)$. Если же такое невозможно, то будем хранить $-\infty$.

Введение вершины $i(v)$. Пусть в узле t записана операция $i(v)$. В данном случае можно записать вершину в любой класс. Получаем $dp_t[s_t(i) = \{S_j\}, 0] = j$ для всех $0 \le j \le k$ и $dp_t[s_t(i) = \{H_j\}, 1] = j$ для всех $1 \le j \le k$.

Непересекающееся объединение $\oplus$. Пусть в узле t записана операция $\oplus$, а t_1 и t_2 являются потомками t.

$$dp_t[s,k] = \max\{dp_{t_1}[s_1,h_1] + dp_{t_2}[s_2,h_2] \,|\, h = h_1 + h_2, \forall i : s(i) = s_1(i) \cup s_2(i)\} \qquad (2)$$

Все состояния для узла t можно посчитать за время $\mathcal{O}^*(2^{2(2k+1)w}k^3w)$, перебрав все возможные s_1, s_2, h_1, h_2.

Переназначение $\rho_{i\to j}$. Пусть в узле t записана операция $\rho_{i\to j}$, а t' ее потомок.

$$dp_t[s,h] = \max\{dp_{t'}[s',h] \,|\, s(i) = s'(i) \cup s'(j)\} \qquad (3)$$

Все состояния могут быть пересчитаны за время $\mathcal{O}(2^{(2k+1)w} \cdot k^3w)$, перебирая все возможные s' и h.

Соединение $\eta_{i,j}$. Пусть в узле t записана операция $\eta_{i,j}$, а t' ее потомок. Обозначим за I все пары классов, между которыми может быть ребро из леммы 2.4.

$$dp_t[s,h] = \max\{dp_{t'}[s,h] | \forall c_1 \in s(i), c_2 \in s(j) : (c_1,c_2) \in I\} \qquad (4)$$

Все состояния можно пересчитать за $\mathcal{O}(2^{(2k+1)w} \cdot k^4)$, перебрав все возможные s и h, и проверив, что все ребра из I.

Итого, максимальное число предметов это $\max_s\{dp_r[s,k]\}$, где r — корневой узел. Все состояния могут быть пересчитаны за $\mathcal{O}^*(2^{2(2k+1)w} \cdot k^4 w)$. $\square$

Хотя и не известно, можно ли найти k-expression tree за время $\mathcal{O}^*(f(k))$, для этой задачи существуют приближенные алгоритмы с таким временем работы. Таким образом получаем, что Locally uHEF-k Attainability является FPT относительно $cw(G)$ и k.

2.4. Выводы

В данной главе были приведены верхние и нижние оценки на число скрываемых предметов. Было показано, что всегда достаточно скрывать $vcn(G)$ предметов, а так же необходимо, если число предметов не ограничено. Если же число предметов m, то необходимо скрывать $\min\{\frac{m}{(\Delta(G)+1)\operatorname{diam}(G)}, vcn(G)\}$ предметов.

Были определены *неуравнимые* предпочтения и доказаны некоторые леммы про них, которые будут активно использоваться в следующих главах. Также, с помощью данных лемм были приведен точный экспоненциальный и параметризованные алгоритмы для Locally uHEF-k Attainability.

3. Нахождение

В данной главе рассмотрим задачу о нахождении распределений, удовлетворяющих критериям.

3.1. Отсутсвие субэкспоненциального алгоритма

В данном параграфе будем пользоваться гипотезой об экспоненциальном времени ETH. Точное формулировка не будет приведена, так как для наших целей она не пригодится. Будем использовать тот факт, что при ее условии Vertex Coverне допускает алгоритм с временем работы $2^{o(|V(G)|+|E(G)|)}$. Vertex Coverформулируется следующим образом: дается граф G и число k, спрашивается, верно ли, что у графа G есть вершинное покрытие размера не более k?

Теорема 3.1. *Не существует алгоритма для* Locally uHEF-k Existence *с временем работы* $2^{o(|A|+|R|+|E|)}$*, если верна* ETH.

Доказательство. Предположим, что наша задача решается за такое время. Возьмем вход (G', k') для задачи о вершинном покрытии, где k' —размер требуемого вершинного покрытия. Построим вход для нашей задачи с $|R| = 3|V(G')| + k' + 6$, $k = k' + 3$ и неуравнимыми предпочтениями. Граф G будет состоять из исходного графа G', трех агентов c_1, c_2, c_3 и $2|V(G)| + 3$ агентов $d_1, \ldots, d_{2|V(G)|+3}$. Подсоединим каждого вершину из G к c_3. Каждого агента d_i подсоединим к c_1. Добавим ребра между агентами d_i и d_{i+1}, c_1 и c_2, c_2 и c_3. Полученный граф изображен на картинке.

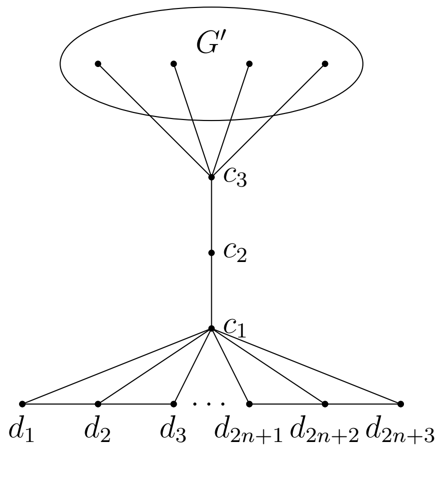

Рис. 4: Сведение Vertex Coverк нашей задаче. Сверху находится исходный граф G', все вершины которого подсоединены к c_3. За n обозначается $|V(G')|$.

Докажем, что если G' имеет вершинное покрытие размера k', то существует Locally uHEF-k распределение. Определим каждого агента из вершинного покрытия G' в H_4, а остальных агентов из G' в S_3. Каждого c_i определим в H_i, а каждого d_i в S_0.

Теперь докажем, что если в G' нет вершинного покрытия размера k', то не существует Locally uHEF-k распределения. Обозначим за n число вершин в G'. Пусть $k = p + q + r$, где p — число агентов в H среди $V(G')$, q — среди $d_1, \dots, d_{2|V(G)|+3}$, r — среди c_1, c_2, c_3. Можем считать, что $k' < n - 3$. В таком случае по принципу Дирихле найдутся два соседних агента d_l и d_{l+1}, лежащие в S, а, следовательно, лежащие и в S_0. Разберем сначала случай $r = 3$. По лемме 2.2 c_i имеет не более i предметов, а значит каждый агент из G' имеет не более 4 предметов, если он лежит в H, и не более 3, если он лежит в S. Заметим, что среди $V(G')$ есть не более $vcn(G') - p$ агентов из S с соседом из S. В противном случае мы бы могли взять этих агентов к p агентам из $V(G') \cap H$ и получить вершинное покрытие меньшего размера, чем $vcn(G')$. Эти агенты должны лежать в S_0. Получается, что среди $V(G')$ всего не более $3(n-p-(vcn(G')-p))+4p$ предметов. Среди c_1, c_2, c_3 не более 6 предметов. Так как у c_1 не более одного предмета, то если $d_i \in H$, то у него не более двух предметов, а если $d_i \in S$, то не более одного. Заметим, что каждая $d_i \in S_1$ обязательно имеет соседа $d_j \in H$. Значит всего $d_i \in S_1$ не более $2q$ и каждый $d_i \in H$ имеет не более 2 предметов, тогда всего среди $d_1, \dots, d_{2|V(G')|+3}$ не более $4q$ предметов. Итого получаем что всего не более

$$3(n-p-(vcn(G')-p))+4p+6+4q$$

Так как $vcn(G') > k'$ и $r = 3$, то $vcn(G') > k-3 = p+q+r-3 = p+q$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
3(n-p-(vcn(G')-p))+4p+6+4q \\
&< 3(n-p-q)+4p+6+4q \\
&\leq 3n+p+q+6 \\
&\leq 3n+k+6
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $r < 3$. В данном случае число предметов у c_3 не будет превосходить 2. Тогда аналогичными соображениями получаем, что всего предметов у агентов не более

$$2(n-p-(vcn(G')-p))+3p+6+4q$$

В этом случае $vcn(G') > k-3 = p+q+r-3 \geq p+q-3$.

$$\begin{aligned}
2(n-p-(vcn(G')-p))+3p+6+4q \\
&< 2(n-p-q+3)+3p+6+4q \\
&\leq 2n+p+2q+12 \\
&\leq 2n+2(p+q)+12 \\
&\leq 2n+2k+12 \text{ (так как } k \geq p+q) \\
&< 3n+k+6 \, (k = k'+3 < n)
\end{aligned}$$

В построенном входе для нашей задачи $|A| = 3|V(G')| + 6$, $|R| \leq 4|V(G')| + 6$, $|E| = |E(G')| + 5|V(G')| + 7$, поэтому если бы существовал алгоритм с временем работы $2^{o(|A|+|R|+|E|)}$, то тогда задачу о вершинном покрытии можно было бы решать за $2^{o(|V(G')|+|E(G')|)}$, что противоречит ETH. □

Данная теорема также говорит о том, что Locally uHEF-k Attainability не решается за субэкспоненциальное время исходя из леммы 2.6, так как в доказательстве использовались неуравнимые предпочтения. Таким образом, при условии ETH алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ оптимален, в том смысле, что нельзя существенно уменьшить показатель степени.

3.2. Отсутствие параметризованного алгоритма

Докажем W[1]-трудность относительно некоторых параметров. Для этого сведем Clique к нашей задаче. В Clique требуется определить, существует ли в графе G клика размера хотя бы k. Известно, что Clique, параметризованная размером клики, является W[1]-полной (это доказывается, например, здесь [2]). Таким образом, если мы сможем построить параметризованную редукцию к ней, то покажем W[1]-трудность данной задачи.

Теорема 3.2. Locally uHEF-k Existence *и* Locally HEF-k Existence, *параметризованные числом предметов* $|R|$ *и* k, W[1]-*трудны, даже если все предпочтения ограничены некоторой константой* t.

Доказательство. Сведем задачу о существовании в графе клики размера k, параметризованной размером искомой клики. Рассмотрим вход (G', k'). Построим вход для наших задач с $|R| = k' + \binom{k'}{2}$ предметами, каждый из которых оценивается каждым агентом в t, $k = k'$ и $A = V(G') \cup E(G')$. Также, будем предполагать, что $|V(G')| > |R|$, в противном случае клику можно найти с помощью полного перебора за время $f(k')$. Данное предположение нам гарантирует, что среди $V(G')$ всегда найдется агент, которому не достался ни один предмет.

Социальная сеть будет следующей: агенты из $V(G')$ образуют клику, агенты из $E(G')$ образуют независимое множество. Каждый агент-ребро $e = \{u, v\} \in E(G')$ имеет ровно двух соседей u и v.

Докажем, что Locally uHEF-k (и Locally HEF-k) распределение существует тогда и только тогда, когда в графе G' существует клика размера k'. Сперва заметим, что каждый агент-вершина либо имеет ровно один предмет, и он является скрываемым, либо не имеет предметов вообще. Если бы у этого агента был бы нескрытый предмет, то ему бы завидовал агент из $V(G')$, не имеющий ни одного предмета, а такой агент всегда есть. Далее докажем два утверждения:

Утверждение 1. *Если существует* Locally uHEF-k *(или* Locally HEF-k*) распределение данных предметов, то существует и* Locally HEF-k *распределение, такое что* $H \subset V(G')$.

Доказательство. Рассмотрим агента-ребро $e \in E(G')$ с ненулевым числом скрытых предметов. Так как каждый агент-вершина $v \in V(G')$ либо не имеет предметов, либо имеет ровно один скрытый предмет, то можно безопасно переместить эти скрытые предметы агентам-вершинам без предметов (такие агенты всегда найдутся, так как $|R| < |V(G')|$). Таким образом получим какое-то Locally HEF-k распределение с $H \subset V(G')$. □

Утверждение 2. *Любое* Locally HEF-k *распределение данных предметов, такое что* $H \subset V(G')$*, является и* Locally uHEF-k *распределением, и* H *является кликой размера* k *в* G'.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда каждый агент-вершина из H имеет ровно один предмет. Это распределение по определению является Locally uHEF-k. Посмотрим на агента-ребро $e = \{u, v\} \in E(G')$, у которого хотя бы один из концов не в H. Пусть для определенности это будет v. Тогда в G есть ребро $\{v, e\}$, и оба его конца не лежат в H. Следовательно, у них должны быть наборы одинаковой ценности, что возможно только тогда, когда у них нет предметов, так как у v нет предметов. Получаем, что только агенты-вершины из H и агенты-ребра, оба конца которых лежат в H, могут иметь предметы, и каждый из них может иметь не более одного предмета. Значит, если H не является кликой, то нельзя раздать $k' + \binom{k'}{2}$ предметов.

Теперь рассмотрим случай, когда агенты-вершины из H могут иметь больше одного предмета. Пусть k_i — число вершин, которые имеют хотя бы i скрытых предметов. Легко заметить, что $k = \sum_{i \geq 1} k_i$. Общее число агентов-ребер, у которых хотя бы i предметов, $\binom{k_i}{2}$, так как агент-ребро имеет хотя бы i предметов, когда оба его конца так же имеют хотя бы i предметов. Следовательно, общее число предметов у агентов-ребер не превосходит $\sum_{i \geq 1} \binom{k_i}{2}$, а всего предметов не более $k + \sum_{i \geq 1} \binom{k_i}{2}$.

$$\sum_{i \geq 1} \binom{k_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} (k_i^2 - k_i) \leq \frac{1}{2}((\sum_{i \geq 1} k_i)^2 - \sum_{i \geq 1} k_i) = \frac{1}{2}(k^2 - k) = \binom{k}{2} \tag{5}$$

Заметим, что если $k_i < k$, то неравенство обращается в строгое, поэтому единственных возможный вариант это $k_1 = k, k_{>1} = 0$, что соответствует Locally uHEF-k распределению. □

Если существует Locally uHEF-k (или Locally HEF-k) распределение для построенного входа, то по утверждению 1 существует Locally HEF-k распределение с $H \subset V(G')$. По утверждению 2 H является кликой размера k в G'. С другой стороны, если в G существует клика K размера k, то можно раздать каждому агенту-вершине по одному скрытому предмету, а каждому агетну-ребру, оба конца которого лежат K, по одному нескрытому предмету и получить требуемое распределение. □

Данную теорему можно немного усилить, если заметить, что мы использовали агентов и предметы одного типа. Таким образом, данные задачи W[1]-трудны, относительно $|R|$, k, T_A и T_R. Также, получаем, что для данной задачи нет FPT-алгоритма при условии FPT $\neq$ W[1].

Немного переделав доказательство, можно показать, что Locally uHEF-k Attainability, параметризованная данными параметрами, является W[1]-трудной. Получается, что параметризованные алгоритмы из предыдущей главы нельзя существенно улучшить (в том смысле, что нельзя убрать $tw(G)$ или $cw(G)$).

3.3. Выводы по главе

В данной главе была показана трудность Locally HEF-k Existence и Locally uHEF-k Existence. Было доказано, что при условии ETH Locally uHEF-k Existence не допускает субэкспоненциального алгоритма, а также то, что алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ для Locally uHEF-k Attainability в некотором смысле оптимален. Для Locally uHEF-k Existence и Locally HEF-k Existence, параметризованных $|R|$, k, T_A, T_R, была показана W[1]-трудность.

4. Проверка

В этой главе рассмотрим задачу о проверке, удовлетворяет ли данное распределение критериям.

4.1. Трудность задач

Используя ту же идею, что и в статье [10], можно показать трудность для Locally HEF-k Verification. Для этого сведем Hitting Set к нашим задачам. В Hitting Set на вход дается множество $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, семейство множеств $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$, $S_i \subseteq U$ и число k. Требуется определить, существует ли такое множество $X \subseteq U$ размера не более k, что каждый S_i содержит хотя бы один элемент из X. Такое множество X будем называть ударяющим. Hitting Set, параметризованная k, является W[2]-трудной.

Теорема 4.1. Locally HEF-k Verification *и* Locally HPROP-k Verification, *параметризованные* k, W[2]-*трудны.*

Доказательство. Сведем Hitting Set к нашим задачам.

Вход для нашей задачи будет следующим: Множество агентов состоит из одного главного агента a и q агентов $a_1, \ldots, a_m$ для каждого множества S_i. Агент a имеет n предметов $r_1, \ldots, r_n$ — по одному на каждый элемент U. Каждый агент a_i имеет ровно $|S_i| - 1$ предметов $f_1^i, \ldots, f_{|S_i|-1}^i$. Каждый агент a_i соединен с главным агентом a. Таким образом, граф представляет собой граф-звезду.

Предпочтения следующие: Агент a оценивает все предметы в 0. Агент a_i оценивает в 1 все свои предметы f_j^i и все предметы, соответствующие элементам из S_i, т.е. такие r_j, что $u_j \in S_i$, а все остальные предметы в 0.

Если существует ударяющее множество $X = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}\}$ размера k, то можно выбрать в качестве скрытых предметы $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}$. Таким образом, каждый агент a_i будет видеть у a не более $|S_i| - 1$ предмет, и поэтому не будет завидовать. a никому не завидует, так как оценивает все предметы в 0.

Теперь в другую сторону. Сперва заметим, что не выгодно скрывать предметы у агентов a_i, в том смысле, что если решение есть, то существует решение не хуже, в котором эти предметы не скрываются. Действительно, если у a_i есть какой-то скрытый предмет, то вместо него можно скрыть любой нескрытый предмет у a. Для всех a_i будет только лучше, а a все равно никому не завидует (здесь мы предполагаем, что $k \leq n$, в противном случае решение очевидно есть и там и там). Получается, что скрываются какие-то предметы $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots r_{i_k}$. Тогда $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}$ образуют ударяющее множество. Пусть это не так, и найдется какое-то неударенное множество S_i. Но тогда a_i видит $|S_i|$ предметов у a и завидует ему — противоречие. □

Теорема 4.2. Locally uHPROP-k Verification, *параметризованная* k, W[2]-*трудна.*

Доказательство. Сведем Hitting Set.

Для каждого элемента $u_i \in U$ введем агента a_i, а для каждого множества $S_i \in S$ введем агента b_i. Соседями b_i будут все агенты a_j, такие что $u_j \in S_i$. Каждый агент a_i будет иметь ровно один предмет r_i, а каждый агент b_i ровно один предмет g_i.

Предпочтения следующие: Каждый агент a_i оценивает все предметы в 0. Каждый агент b_i оценивает свой предмет g_i в $|S_i| - 1$, все предметы r_j, такие что $r_j \in S_i$, в $|S_i|$, а все остальные предметы в 0.

Если существует ударяющее множество $X = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}\}$ размера k, то можно выбрать в качестве скрытых предметы $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}$. Таким образом, для каждого агента b_i, средняя ценность предметов его соседей не будет превосходить $|S_i| - 1$. Каждый a_i никому не завидует, так как оценивает все предметы в 0.

Теперь в другую сторону. Заметим, что если существует решение, то и существует решение, где скрыты только предметы из $\{r_1, \ldots, r_n\}$, так как можно вместо любого другого предмета скрыть предмет из этого множества (предполагая, что $k < n$, иначе решение очевидно существует). В этом случае скрытые предметы $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots r_{i_k}$ дают ударяющее множество $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}$. Пусть это не так, и найдется какое-то неударенное множество S_i. Но тогда для b_i средняя ценность соседей равна $|S_i|$, что строго больше $|S_i| - 1$. Пришли к противоречию. □

Для следующего результата потребуется другая задача. В Equitable Coloring на вход дается граф G и число q. Требуется определить, допускает ли G правильную окраску в q цветов, такую что число вершин каждого цвета одинаково. Данная задача является W[1]-трудной, если параметризована древесной шириной G и числом цветов q [20].

Теорема 4.3. Locally HPROP-k Verification *и* Locally uHPROP-k Verification, *параметризованные древесной шириной* G*, числом типов предметов и числом типов агентов,* W[1]-*трудны.*

Доказательство. Сведем Equitable Coloring к нашим задачам. Возьмем вход (G', q).

Для каждой вершины $v \in V(G')$ создадим агентов a_v и b_v, соединенных между собой ребром. Для каждого ребра $e = \{u, v\} \in E(G')$ будут q агентов $w_e^1, \ldots, w_e^q$, каждый из которых будет соединен с a_u и a_v. Создадим еще q агентов $f_1, \ldots, f_q$, каждый из которых будет соединен со всеми a_v. Полученная социальная сеть изображена на рисунке.

Предметы будут состоять из нескольких множеств, каждое из которых задает предметы определенного типа. Для каждого цвета $C_1, \ldots, C_q$, D, $S_1, \ldots, S_q$. Каждый агент a_v будет иметь по одному предмету из каждого $C_1, \ldots, C_q$. Каждый агент b_v будет иметь один предмет из D. Каждый агент f_i будет иметь один предмет из S_i. Каждый агент w_e^i будет иметь один предмет D.

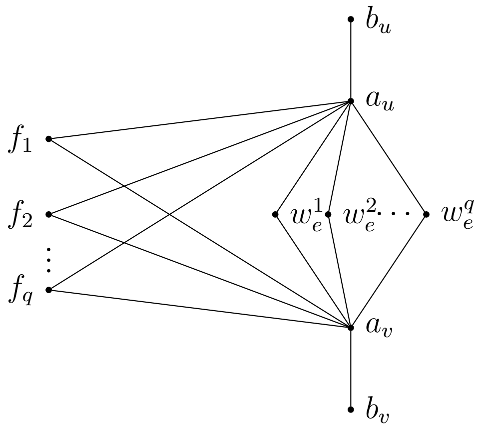

Рис. 5: Структура социальной сети. На рисунке изображены ребра для двух соседних вершин u и v.

Далее зададим предпочтения. Для разных задач они будут отличаться. Если какие-то предпочтения не были указаны, то будем считать, что тогда предмет оценивается в 0.

Предпочтения для Locally uHPROP-k Verification

- b_v оценивает предметы из C_j в 1, предметы из D в $q-1$. Таким образом b_v заставляет a_v иметь скрытый предмет. Заметим, что тогда скрытые предметы имеют только такие агенты, так как в противном случае какому-то агенту a_u не достался скрытый предмет.

- w_e^i оценивает предметы из C_j для всех $j \neq i$ в 2, предметы из D в $2q-3$. Таким образом w_e^i запрещает a_v и a_u обоим иметь скрытый предмет из C_i, так как в этом случае средняя ценность наборов его соседей будет равна $2q-2$. Если же хотя бы у одного из них этот предмет скрыт, то средняя ценность не будет превосходить $2q-3$.

- f_i оценивает предметы из C_i в n, а предметы из S_i в $n - \frac{n}{q}$. Таким образом f_i заставляет скрывать хотя бы $\frac{n}{q}$ предметов из C_i. Заметим, что тогда должно скрываться ровно $\frac{n}{q}$ предметов из C_i, так как всего скрывается n предметов, а поэтому если скрыто строго больше, то тогда предметов какого-то другого типа C_j скрывается строго меньше $\frac{n}{q}$. Тогда условие для f_j будет нарушено.

Предпочтения для Locally HPROP-k Verification

- b_v оценивает предметы из C_j в 1, предметы из D в 1 и таким образом заставляет a_v иметь не более одного нескрытого предмета. Заметим, что тогда a_v имеет ровно один нескрытый предмет, так как в противном случае, из-за того, что всего скрывается $n(q1)$ предмет, нашелся бы агент a_u, который имел бы хотя бы два нескрытых предмета.

- w_e^i оценивает предметы из C_i в 2, предметы из D в 1. Таким образом w_e^i запрещает a_v и a_u обоим иметь нескрытый предмет из C_i, так как тогда средняя ценность предметов соседей будет равна 2. Если же хотя бы у одного из них этот предмет скрыт, то средняя ценность не будет превосходить 1.

- f_i оценивает предметы из C_i в n, а предметы из S_i в $\frac{n}{q}$. Таким образом из C_i должно скрываться не более $\frac{n}{q}$ предметов. Заметим, что тогда должно скрываться ровно $\frac{n}{q}$ предметов из C_i, так как всего серди агентов a_v ровно n нескрытых предметов. Поэтому, если для скрывается строго меньше, то тогда предметов какого-то другого типа C_j нескрытых предметов строго больше $\frac{n}{q}$. Тогда условие для f_j будет нарушено.

В первом случае покрасим вершину v в цвет j, если у a_v есть скрытый предмет j. Во втором случае поступаем аналогично, только смотрим на нескрытый предмет. Полученная раскраска получается правильной — это нам гарантировали агенты w_e^i. Вершин каждого цвета будет ровно $\frac{n}{q}$ благодаря агентам f_i.

В обратную сторону, надо скрыть предметы, соответствующие цвету вершины (или наоборот скрыть все остальные во втором случае). Очевидно данные скрытия удовлетворят всем условиям агентов.

Осталось показать, что параметры не выросли слишком сильно при таком сведении. Число типов агентов $T_A = 2q + 2$, типов предметов $T_R = 2q + 1$. Оценим древесную ширину полученного графа G. Для этого возьмем оптимальную древесную декомпозицию G' и из нее построим древесную декомпозицию G. Сперва заменим все вершины v в сумках на a_v. Для каждого агента a_v добавим в каждую сумку с ним агента b_v, таким образом покрыв все ребра $\{a_v, b_v\}$ и добавив в каждую сумку не более $tw(G) + 1$ агентов. Для каждого ребра $e = \{u, v\} \in E(G')$ добавим в сумку, где есть и a_u, и a_v (а такая сумка всегда найдется) агентов $w_e^1, \dots, w_e^q$, таким образом, добавив в каждую сумку не более $\binom{tw(G)+1}{2}q$ агентов. Затем добавим еще в каждую сумку агентов $f_1, \dots, f_q$. Итого размер каждой сумки после таких операций не превышает $2tw(G) + 2 + \binom{tw(G)+1}{2}q + q$, что ограничено некоторой функцией от $tw(G) + q$. Таким образом мы действительно получили параметризованную редукцию. $\square$

4.2. Параметризованный алгоритм

Приведем параметризованный алгоритм для Locally uHPROP-k Verification.

Теорема 4.4. Locally uHEF-k Verification, *параметризованная древесной шириной G и числом типов предметов T_R, является* FPT.

Доказательство. Рассмотрим хорошую древесную декомпозицию G с корневым узлом r. Ее можно найти за FPT время. Для каждого агента в сумке будем запоминать какого типа предмет он скрывает, либо что он не скрывает никаких предметов, с помощью функции $f : X_t \to \{\hat{z}, \hat{c_1}, \ldots, \hat{c_{T_R}}\}$ ($\hat{z}$ означает отсутствие скрытого предмета). Будем называть f локально корректным на множестве X, если никакая пара соседних агентов в X не завидует друг другу с такими выбранными скрытыми предметами.

Пусть $dp_t[h, f]$ — можно ли выбрать множество скрытых предметов так, чтобы в V_t никто никому не завидовал, и что агенты из X_t скрывают предметы типа, который задает f, и ровно h агентов из V_t принадлежат H. Тогда для каждого t число состояний не превосходит $\mathcal{O}^*(2^{(T_R+1)(tw(G)+1)})$

Листовой узел. Если t является листовым узлом, то $dp_t[0, \emptyset] = 1$, остальные 0.

Вводящий узел. Пусть t является вводящим узлом с потомком t' и $X_t = X_{t'} \cup \{a\}$. Тогда

$$dp_t[h, f] = \begin{cases} dp_{t'}[h, f|_{X_{t'}}] + i & \text{если } f(a) = \hat{z} \\ dp_{t'}[h-1, f|_{X_{t'}}] + i & \text{если } f(a) \neq \hat{z} \end{cases}$$

Действительно, если $dp_t[h, f] = 1$, то выкинув a мы получим какое-то распределение без зависти, которое подойдет для нашего потомка, а значит и его значение 1. Если же правая часть равенства равна 1, а f локально корректно, то очевидно можно добавить агента a и не получить при этом зависти.

Забывающий узел. Пусть t является забывающим узлом с потомком t' и $X_t = X_{t'} \setminus \{a\}$. Тогда

$$dp_t[h, f] = \bigvee\{dp_{t'}[h, f_{a \to c}] | c \in C\} \tag{6}$$

Действительно, если $dp_t[h, f] = 1$, а f локально корректно, добавив a мы получим какое-то распределение без зависти, которое подойдет для нашего потомка, а значит и его значение 1. Если же правая часть равенства равна 1, а f локально корректно, то очевидно сузив f на меньшее множество мы не получим зависти.

Сливающий узел. Пусть t узел слияния с потомками t_1 и t_2, $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$. Тогда

$$dp_t[h, f] = \bigvee\{dp_{t_1}[h_1, f] \wedge dp_{t_2}[h_2, f] \,|\, h_1 + h_2 = k + |f^{-1}(C \setminus \{\hat{z}\})|\}$$

Если $dp_t[h, f] = 1$ и f локально корректно, то оно дает какое-то распределение без зависти на V_{t_1} и V_{t_2} с таким f и какими-то h_1, h_2. Значит хотя бы одно $\wedge$ будет истинно. Если же правая часть равенства равна 1, а f локально корректно, то значит существуют два каких-то распределения без зависти на V_{t_1} и V_{t_2} с таким f и какими-то h_1, h_2. Очевидно, что объединив их, мы не получим зависти на V_t.

Итого, ответ это $dp_r[k, \emptyset]$.

Все состояния в каждом узле можно пересчитать за $\mathcal{O}^*(2^{(T_R+1)(tw(G)+1)})$, что завершает доказательство. $\square$

4.3. Выводы по главе

С помощью сведения Hitting Set была показана W[1] трудность Locally HEF-k Verification, Locally HPROP-k Verification и Locally uHPROP-k Verification, параметризованных k. Сведением Equitable Coloring была показана W[1] трудность Locally HPROP-k Verification и Locally uHPROP-k Verification, параметризованных древесной шириной G, числом типов предметов T_R и числом типов агентов T_A. Было доказано, что Locally uHEF-k Verification, параметризованная древесной шириной G и числом типов предметов T_R, является FPT.

5. Заключение

В данной работе были обобщены существующие критерии со скрытием фиксированного числа предметов на социальные сети и изучена вычислительная сложность связанных с ними задач.

Были приведены верхние и нижние оценки на число предметов, которые необходимо скрыть, независимо от предпочтений агентов, а так же нижняя оценка, учитывающая число предметов.

Для задачи нахождения минимального достаточного для любых предпочтений был приведен экспоненциальный точный алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(2^{|A|})$ для критерия Locally uHEF-k, а также показано то, что при условии ETH, он не может быть существенно улучшен. К сожалению, это не означает, что нельзя придумать алгоритм с временем работы $\mathcal{O}^*(c^{|A|})$, где $c < 2$. Доказать, что такого алгоритма нет, можно было бы в предположении более сильных, чем ETH гипотез, однако это не удалось сделать, как и не удалось придумать более эффективный алгоритм. Дальнейшая работа может быть направлена на разрешение этого вопроса. Также, были приведены параметризованные алгоритмы относительно древесной ширины и числа скрытий, кликовой ширины и числа скрытий. Было показано, что древесная ширина и кликовая ширина являются существенными параметрами, так как без них данная задача уже W[1]-трудная.

Для задачи нахождения распределений было получено, что не существует субэкспоненциального алгоритма для Locally uHEF-k Existence, при условии ETH. Была показана W[1]-трудность Locally uHEF-k Existence и Locally uHEF-k Existence с параметрами число предметов и k.

Для задачи проверки распределений удалось охватить больше всего критериев. Была показана W[2]-трудность Locally HEF-k Verification, Locally HPROP-k Verification и Locally uHPROP-k Verification с параметром k. Была показана W[1] трудность Locally HPROP-k Verification и Locally uHPROP-k Verification, параметризованных древесной шириной G, числом типов предметов T_R и числом типов агентов T_A. Было показано, что Locally uHEF-k Verification, параметризованная древесной шириной G и числом типов предметов T_R, является FPT.

Полученные результаты во многом оприались на свойства неуравнимых предпочтений. Данные свойства присутствуют только в случае Locally HEF-k и Locally uHEF-k. К сожалению, не удалось придумать предпочтения с похожими хорошими свойствами, но для Locally HPROP-k и Locally uHPROP-k. Из-за этого не удалось получить результаты для Locally HPROP-k Attainability, Locally uHPROP-k Attainability, Locally HPROP-k Existence и Locally uHPROP-k Existence. В дальнейшем можно попробовать заполнить этот промежуток, используя другие подходы.

Список литературы

[1] Courcelle B., Makowsky J., Rotics Udi. Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique-Width // Theory of Computing Systems. — 2000. — Vol. 33. — P. 125–150.

[2] Downey Rodney G, Fellows Michael Ralph. Parameterized complexity. — Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Foley Duncan K. Resource allocation and the public sector. — 1967.

[4] Steinhaus Hugo. Report of the Washington Meeting, September 6-18, 1947 // Econometrica. — 1948. — Vol. 16, no. 1. — P. 33–111.

[5] Lipton R., Markakis E., Mossel Elchanan, Saberi A. On approximately fair allocations of indivisible goods // EC '04. — 2004.

[6] Aziz H., Gaspers Serge, Mackenzie S., Walsh T. Fair assignment of indivisible objects under ordinal preferences // AAMAS. — 2014.

[7] Budish Eric. The Combinatorial Assignment Problem: Approximate Competitive Equilibrium from Equal Incomes // Journal of Political Economy. — 2011. — Vol. 119, no. 6. — P. 1061 – 1103.

[8] Caragiannis I., Kurokawa David, Moulin H. et al. The Unreasonable Fairness of Maximum Nash Welfare // Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation. — 2016.

[9] Goldman Jonathan R., Procaccia Ariel D. Spliddit: unleashing fair division algorithms // SIGecom Exch. — 2015. — Vol. 13. — P. 41–46.

[10] Hosseini Hadi, Sikdar Sujoy, Vaish Rohit et al. Fair Division through Information Withholding // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. — Vol. 34. — 2020. — P. 2014–2021.

[11] Conitzer Vincent, Freeman Rupert, Shah Nisarg, Vaughan Jennifer Wortman. Group Fairness for the Allocation of Indivisible Goods // AAAI. — 2019.

[12] Bouveret S., Cechlárová K., Elkind E. et al. Fair Division of a Graph // IJCAI. — 2017.

[13] Abebe Rediet, Kleinberg J., Parkes D. Fair Division via Social Comparison // AAMAS. — 2017.

[14] Bei Xiaohui, Qiao Y., Zhang Shengyu. Networked Fairness in Cake Cutting // IJCAI. — 2017.

[15] Bredereck Robert, Kaczmarczyk Andrzej, Niedermeier Rolf. Envy-Free Allocations Respecting Social Networks // Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems. — AAMAS '18. — 2018. — P. 283–291.

[16] Eiben E., Ganian Robert, Hamm Thekla, Ordyniak Sebastian. Parameterized Complexity of Envy-Free Resource Allocation in Social Networks // AAAI. — 2020.

[17] Ganian Robert, Ordyniak Sebastian, Rahul C. Group Activity Selection with Few Agent Types // ArXiv. — 2019. — Vol. abs/1808.06954.

[18] Cygan M., Fomin F., Kowalik Lukasz et al. Parameterized Algorithms // Springer International Publishing. — 2015.

[19] Kloks T. Treewidth, Computations and Approximations // Lecture Notes in Computer Science. — 1994.

[20] Fellows M., Fomin F., Lokshtanov D. et al. On the complexity of some colorful problems parameterized by treewidth // Information & Computation. — 2011. — Vol. 209. — P. 143–153.