**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего образования
"Национальный исследовательский университет**

**"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента

Национального исследовательского университета

«Высшая школа экономики»

**Рабочая программа**

**«Специальная дисциплина»**

для направления 01.06.01 «Математика и механика»
подготовки научно-исследовательских кадров в аспирантуре
01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»,
01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»

Разработчик(и) программы

Широков Н.А., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес информатики, nshirokov@hse.ru

Одобрена на заседании Академического совета Аспирантской школы по математике

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г.

Академический директор

Аспирантской школы по математике НИУ ВШЭ

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.Г. Горинов

 Санкт-Петербург, 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа «Специальная дисциплина» устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика», и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов направления 01.06.01 «Математика и механика».

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

* Образовательным стандартом НИУ ВШЭ [https://www.hse.ru/data/2016/10/24/1110764733/01.06.01%20Математика%20и%20механика.pdf](https://www.hse.ru/data/2016/10/24/1110764733/01.06.01%20%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%B8%20%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf);
* Образовательной программой аспирантуры для направления 01.06.01 «Математика и механика» подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»;
* Учебным планом образовательной программы аспирантуры для направления 01.06.01 «Математика и механика» подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика», утвержденным в 2018 г.

# Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины является подготовка к сдаче и сдача кандидатского экзамена по специальности в соответствии с научной специальностью подготавливаемой научно-квалификационной работы (диссертации).

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

**Знать** основные методы проведения научных исследований в областях математики, связанные с профилями (направленностью) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

**Уметь** применять в исследовательской деятельности изученные методы; формулировать задачу исследования.

**Владеть** навыками самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа.

В результате подготовки и сдачи кандидатского экзамена по специальной дисциплине аспирант должен:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Компетенция | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции | Форма контроля уровня сформированности компетенции |
| ОПК-1 | Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований рамках выбранной теоретической области | Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных | экзамен |
| ОПК-2 | Имеет закрепленные навыки в поиске и применении различных методов решения стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задаче приемов исследования в выбранной области математики | Самостоятельное исследование с целью усовершенствования существующих методов исследований | экзамен |
| ОПК-7 | Обладает знанием принципов академической и профессиональной этики, умеет связывать научное творчество с ответственностью за результат | Работа с литературой, в том числе грамотное цитирование источников, презентация самостоятельного исследования | экзамен |
| ПК-1 | Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования | Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, дискуссия | экзамен |
| ПК-2 | Имеет навыки использования готовых и разработки новых математических моделей, основанных на случайных данных. Умеет проводить верификацию модели, оценивать ее достоверность адекватными методами | Работа с различными базами данных, в том числе статистическими, дискуссия | экзамен |
| ПК-3 | Имеет навыки анализа исходных, в том числе случайных, данных и факторов и агрегации их взаимодействия в рамках математической модели. Умеет формулировать теоретические положения, отражающие закономерности случайных явлений и доказывать их, верифицировать свойства вероятностных моделей  | Самостоятельная работа с научными статьями по тематике случайных явлений и процессов, презентация исследований, дискуссия | экзамен |

# Место в структуре образовательной программы

Кандидатский экзамен относится к циклу обязательных для аспирантов данной образовательной программы дисциплин вариативной части учебного плана по направлению подготовки 01.06.01 "Математика и механика".

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.

# Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ 1 зачетная единица.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов  | Аудиторные часы | Самостоятельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Ортогональные полиномы | 4 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | Носители меры на компактах | 4 | 0 | 0 | 4 |
| 3 | Теоремы об оценках | 10 | 0 | 0 | 10 |
| 4 | Диффузионные процессы | 10 | 0 | 0 | 10 |
| 5 | Распределение функционалов от броуновского движения | 10 | 0 | 0 | 10 |
| **ИТОГО** | **38** | **0** | **0** | **38** |

# Содержание дисциплины

*Профиль 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»*

Раздел 1. Ортогональные полиномы.

Ортогональные полиномы по конечной борелевской мере; минимальная емкость относительно носителя меры; борелевской мере; минимальная емкость относительно носителя меры функции Грина; связь с обычной емкостью и функцией Грина области.

Раздел 2. Носителя меры на компактах.

Равновесные распределения минимальные относительно носителя меры на компактах; строение соответствующих функций Грина; минимальный носитель.

Раздел 3. Теоремы об оценках.

Общая теорема об оценке сверху произвольной последовательности полиномов через минимальную относительно носителя меры функцию Грина.

Теорема о реализации верхней оценки для ортогональных по мере полиномов.

Оценка снизу для произвольных ортогональных полиномов через классическую функцию Грина.

Оценка снизу на компакте частичного произведения ортогонального полинома.

Оценка для старших коэффициентов ортогональных по мере полиномов.

Построение меры, для которой реализуется нижняя оценка асимптотике ортогональных по этой мере полиномов.

Построение примера меры, для ортогональных полиномов, для которой в асимптотике имеются строгие неравенства.

Локализация нулей ортогональных полиномов. Пример меры, сосредоточенной на полуокружности.

Связь между слабым пределом вероятностных мер, построенных по нулям ортогональных полиномов, и асимптотикой старших коэффициентов этих полиномов.

*Профиль 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»*

Раздел 1. Диффузионные процессы.

Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения. Причины и источники необходимости введения и изучения диффузионных процессов. Стохастическое уравнение Эйнштейна-Смолуховского. Определение диффузионных процессов А.Н. Колмогорова. Диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений.

Понятия марковского процесса и переходной вероятности марковского процесса. Выражение конечномерных распределений марковского процесса через начальное распределение и переходную вероятность. Определение диффузионного процесса. Формулировки и доказательства достаточных условий диффузионности. Решение стохастического дифференциального уравнения как марковский процесс. Условия, при которых диффузионные процессы являются решением стохастических дифференциальных уравнений. Связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии. Однородные диффузионные процессы и отвечающие им стохастические дифференциальные уравнения. Ввероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.

Раздел 2. Распределение функционалов от броуновского движения.

Общий подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения. Доказательство результатов, позволяющих вычислять распределение интегральных функционалов от броуновского процесса (формула Фейнмана-Каца) и функционалов инфимума и супремума броуновского процесса. Примеры использования. Метод вычисления условных распределений функционалов при условии, что конец траектории фиксирован (вычисления распределений функционалов от броуновского моста). Распределения функционалов в фиксированный момент времени. Подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала. Применение в теории страхования (вычисление вероятностей разорения) и в финансовой математике. Теорема о замене меры (преобразование Гирсанова), ее приложения. Вывод результатов о распределении функционалов от броуновского движения с линейным сносом.

# Оценочные средства

# 7.1. Формы контроля знаний

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 2 курс | Параметры  |
| 1 полугодие | 2 полугодие |
| Итоговый | Кандидатский экзамен | 1 |  | Устный экзамен.Проводится в соответствии с правилами, регламентирующими проведение экзамена |

# 7.2. Критерии и шкалы оценки знаний, примеры заданий

# Форма проведения испытания

Кандидатский экзамен проводится в устной форме.

# Структура кандидатского экзамена

Экзамен состоит из ответа на билет, который включает один вопрос из общего раздела программы по профилю и два вопроса из раздела по теме диссертационного исследования соискателя.

# 7.2.1. Итоговый контроль по дисциплине

Проверка качества освоения дисциплины производится в форме кандидатского экзамена.

**Примерные вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

**Перечень вопросов к экзамену кандидатского минимума по научной специальности 01.06.01 «Математика и механика» (общий раздел)**

*Профиль 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»*

1. Минимальная емкость относительно носителя меры.
2. Минимальная емкость относительно носителя меры функции Грина.
3. Строение функций Грина относительно носителя меры на компактах.
4. Общая теорема об оценке сверху произвольной последовательности полиномов через минимальную относительно носителя меры функцию Грина.
5. Теорема о реализации верхней оценки для ортогональных по мере полиномов.
6. Оценка снизу на компакте частичного произведения ортогонального полинома.
7. Оценка для старших коэффициентов ортогональных по мере полиномов.
8. Построение примера меры, для ортогональных полиномов, для которой в асимптотике имеются строгие неравенства.
9. Локализация нулей ортогональных полиномов.

*Профиль 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»*

1. Связь между слабым пределом вероятностных мер, построенных по нулям ортогональных полиномов, и асимптотикой старших коэффициентов этих полиномов.
2. Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения.
3. Стохастическое дифференциальное уравнение Эйнштейна-Смолуховского.
4. Строгое математическое определение диффузионных процессов по А.Н. Колмогорову.
5. Марковские процессы и переходная вероятность марковского процесса.
6. Достаточные условия диффузионности.
7. Связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии.
8. Вероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.
9. Вычислению распределений функционалов от броуновского движения.
10. Эффективное вычисление явных формул для распределений некоторых функционалов от броуновского движения.
11. Метод вычисления условных распределений функционалов при условии, что конец траектории фиксирован (вычисления распределений функционалов от броуновского моста).
12. Подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала.
13. Распределение функционалов от броуновского движения с линейным сносом.

**Специальный раздел (вопросы в соответствии с разделом тематики диссертационного исследования аспиранта)**

1. Симметризация Штейнера.
2. Неравенство Брунна--Минковского.
3. Отображения Кноте и Бренье.
4. Неравенства Прекопы--Лейндлера.
5. Неравенство Роджерса--Шепарда.
6. Лемма Бореля и изопериметрическое неравенство.
7. Неравенства Сантало и Урысона.
8. Теорема Джона и контактные точки.
9. Лемма Дворецкого--Роджерса.
10. Позиции минимальной ширины и минимальной площади поверхности.
11. Неравенство Браскампа--Либа и теорема Барта.
12. Теорема Болла о максимальном объемном отношении и обратное изопериметрическое неравенство.
13. Изопериметрическое неравенство на сфере.
14. Неравенство Судакова--Цирельсона. Изопериметрическое неравенство для дискретного куба.
15. Неравенство Талаграна.
16. Функция концентрации.
17. Концентрация липшицевой функции на сфере.
18. Неравенство Хинчина--Кахана.
19. Логарифмически вогнутые функции.
20. Неравенства Бернштейна.
21. Covering numbers.
22. Оценки объема с помощью covering numbers.
23. Неравенство Судакова.
24. Энтропийные числа.
25. Теорема Дворецкого.
26. Критическая размерность в теореме Дворецкого.
27. Теорема Кашина.
28. Глобальная версия теоремы Дворецкого.
29. $K$-выпуклость и неравенство Пизье.
30. Проекция Радемахера.
31. $\ell$-норма и неравенство Фигеля--Томчак-Егерманн.
32. $MM^\*$-оценки.
33. $M^\*$-оценки.
34. $QS$-теорема.
35. $M$-позиция Мильмана.
36. Неравенство Бургейна--Мильмана.
37. Обратное неравенство Брунна--Минковского.
38. Изотропная позиция.
39. Объемы сечений коразмерности 1.
40. *Оценка изотропной константы*.
41. Продолжение функции f на всю плоскость; свойства продолжения $f\_{0}$; определение функций $φ\_{n}$.
42. Построение функции $f\_{1}$ представления функции $f(x)$ при $x\in E$.
43. Конформные отображения $φ\_{+}, φ\_{-}, z\_{ξ, s}^{\pm } $; свойства функций $z\_{ξ, s}^{\pm }$.
44. Построение функций $R\_{k}$ и $F\_{σ}$ без учета их зависимости от последовательностей $X'$ и $X''$.
45. Построение функции $F\_{σ}(w, Y\_{N}^{'}, Y\_{N}^{''})$; формула для разности $F\_{σ}\left(w, Y\_{N}^{'}, Y\_{N}^{''}\right)-f(w)$.
46. Оценка $\left|F\_{σ}\left(w, Y\_{N}^{'}, Y\_{N}^{''}\right)-f(w)\right|$, слагаемое $T\_{1}$.
47. Оценка $\left|F\_{σ}\left(w, Y\_{N}^{'}, Y\_{N}^{''}\right)-f(w)\right|$, слагаемое $T\_{21}$.
48. Оценка $\left|F\_{σ}\left(w, Y\_{N}^{'}, Y\_{N}^{''}\right)-f(w)\right|$, слагаемое $T\_{22}$.
49. Формула для $s\_{σ}^{+}$ и $s\_{σ}^{-}$.
50. Оценка для $s\_{σ}^{+}$ и $s\_{σ}^{-}$.
51. Доказательство прямой теоремы приближения для $ω\_{α}\left(t\right)=t^{α}$.
52. Построение континуума $Γ(t)$.
53. Формулы для $F\_{σ}(w, t)$ и $F\_{σ}(w)$.
54. Слагаемые $T\_{n\_{0}}(x)$ и $V\_{n\_{0}}(x)$ в формуле для $F\_{σ}\left(x\right)-f(x)$; оценка $V\_{n\_{0}}(x)$.
55. Оценка $T\_{n\_{0}}(x)$; оценка $F\_{σ}\left(x\right)-f(x)$.
56. Определение $d\_{s}(x)$ и $δ\_{ρ-1}(x)$; их соизмеримость.
57. Оценка $F\_{σ}$ на множестве $E\_{1+\frac{1}{σ}}\left(I\_{n}\right)$.
58. Оценка $F\_{σ}$ на $\left[x(ξ\_{0}), z(ξ\_{0})\right]$.
59. Оценка $F\_{2^{N\left(z\right)}}\left(z\right)-F\_{2^{N(z)-1}}(z)$
60. Доказательство обратной теоремы.

**Примерные варианты билета кандидатского экзамена**

Билет №1

* + - 1. Минимальная емкость относительно носителя меры.
			2. Вопрос из специального раздела
			3. Вопрос из специального раздела

Билет №2

* + - 1. Строение функций Грина относительно носителя меры на компактах.
			2. Вопрос из специального раздела.
			3. Вопрос из специального раздела

Билет №3

* + - 1. Стохастическое дифференциальное уравнение Эйнштейна-Смолуховского.
			2. Вопрос из специального раздела.
			3. Вопрос из специального раздела.

Билет №4

* + - 1. Вычислению распределений функционалов от броуновского движения.
			2. Вопрос из специального раздела.
			3. Вопрос из специального раздела.

# 7.3. Порядок формирования оценок по дисциплине

**Оценка уровня знаний (баллы)**

Каждый вопрос оценивается по пятибалльной шкале. Итоговая оценка выставляется по 5-бальной шкале по следующему принципу пересчета:

"Отлично" - 5 баллов (по 5-балльной шкале);

"Хорошо" - 4 балла (по 5-балльной шкале);

"Удовлетворительно" - 3 балла (по 5-балльной шкале);

# "Неудовлетворительно" - 2 балла (по 5-балльной шкале).

# Критерии оценивания

|  |  |
| --- | --- |
| *Критерии выставления оценки* | *Баллы* |
| Ответ полный без замечаний, продемонстрированы знания по специальной дисциплине | 5 |
| Ответ полный, с незначительными замечаниями | 4 |
| Ответ не полный, существенные замечания | 3 |
| Ответ на поставленный вопрос не дан | 2 |

Невыполнение одного из заданий (или отказ от его выполнения) является, как правило, основанием для выставления неудовлетворительной оценки за кандидатский экзамен в целом.

# Образовательные технологии

## Для данного курса используются классические образовательные технологии. Основное внимание направлено на самостоятельную работу аспирантов с литературой и электронными ресурсами НИУ ВШЭ с доступом к базам международных издательств и рецензируемых научных журналов.

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

**9.1. Основная литература**

1. Булинский, А.В. Теория случайных процессов [Электронный ресурс] /БулинскийА.В., Ширяев А.Н. - М.: Физматлит, 2005. - 400 с.: ISBN 978-5-9221-0335-0 - Режим доступа: <http://proxylibrary.hse.ru:2109/catalog/product/544606> (ЭБС "Znanium.com").
2. Синкевич, Г.И. От метода каскадов к изучению свойств непрерывных функций: историческая хроника [Электронный ресурс] // Вопросы истории естествознания и техники, № 4, Том 36, 2015, с. 642-664. - Режим доступа по паролю: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25593648> (ЭБС "Elibrary.ru").

**9.2. Дополнительная литература**

1. Krantz, S. A Guide to Functional Analysis [Electronic resource] / Steven G. Krantz. - Washington : Mathematical association of America, 2013.- 150 p. - Authorized access: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/hselibrary-ebooks/detail.action?docID=3330378> (Online Digital Library "Ebrary").
2. Willem M. Functional Analysis: Fundamentals and Applications [Electronic resource] / M. Willem. - Springer, 2013. - Authorized access: [https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4614-7004-5](https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-7004-5) (Springer eBooks).
3. Elliott R. Mathematics of Financial Markets [Electronic resource] / Robert J. Elliott, P. Ekkehard Kopp. - Springer, New York, NY, 2004. - 356 p. - Authorized access: <https://proxylibrary.hse.ru:2066/10.1007/b97681> (Springer eBooks).

**9.3. Программные средства**

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

* система компьютерной вёрстки LaTeX.

# Рекомендации для самостоятельной работы аспирантов

Подготовка к сдаче кандидатского экзамена представляет собой самостоятельную внеаудиторную работу аспирантов.

Самостоятельная работа может рассматриваться как организационная форма обучения – система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью по освоению знаний и умений в области учебной деятельности без посторонней помощи. Аспиранту нужно четко понимать, что самостоятельная работа – не просто обязательное, а необходимое условие для получения знаний по дисциплине и развитию компетенций, необходимых в будущей профессиональной деятельности.

В специальной дисциплине предусмотрена внеаудиторная самостоятельная работа:

Внеаудиторная самостоятельная работа ‑ планируемая учебная работа аспирантов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная программой учебной дисциплины, раскрывающей и конкретизирующей ее содержание, осуществляется студентом инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует источники для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь как универсальный, так вариативный и дифференцированный характер, учитывать индивидуальные особенности аспиранта.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами аспирантов, online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине, или в рамках консультаций.

# Материально-техническое обеспечение дисциплины и информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения информационных справочных систем (при необходимости)

Учебные аудитории для самостоятельных занятий оснащены компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ. Для самостоятельной работы аспиранты могут использовать компьютеры в библиотеке и личные ноутбуки.

# Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться следующих варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

1) *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

2) *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

3) *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.