Гравитационное запирание

По статье Tidal locking and the gravitational fold catastrophe
Andrea Ferroglia and Miguel C. N. Fiolhais

Грицков Максим Васильев Дмитрий

29 апреля 2021 г.

План действий

1 Общий случай

1.1 Эффективный потенциал

Перейдем в со центра масс и поместим туда начало координат $\vec{r_{cm}} = \frac{M_1\vec{r_1}+M_2\vec{r_2}}{M_1+M_2} = 0 \ \Rightarrow \ M_1r_1 = M_2r_2$ (1)

$L = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + M_1r_1^2\dot{\phi_1} + M_2r_2^2\dot{\phi_2}$ (2)

$\sum \vec{P_s} = 0 = M_1(\vec{v_{1t}} + \vec{v_{1n}}) + M_2(\vec{v_{2t}} + \vec{v_{2n}}) \Rightarrow$

$M_1\dot{r_1} = M_2\dot{r_2}$ (3) $\ \wedge\ M_1r_1\dot{\phi_1} = M_2r_2\dot{\phi_2}$ (4)

Из (1), (2), (3) и (4) : $\dot{\phi_1} = \dot{\phi_2} = \frac{M_1(L-I_1\omega_1-I_2\omega_2)}{M_2(M_1+M_2)r_2^2}$ (5)

1 Общий случай

1 Общий случай Введем следующую физическую величину :

$$U_{eff} \equiv -\frac{M_1 M_2 G}{r_1+r_2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{M_1(\dot{\phi}_1 r_1)^2}{2} + \frac{M_2(\dot{\phi}_2 r_2)^2}{2} \overset{(1) and (5)}{=}$$

$$= -\frac{M_1^2 M_2 G}{(M_1+M_2) r_2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{M_1(L-I_1\omega_1-I_2\omega_2)^2}{2M_2(M_1+M_2)r_2^2} \quad (6!)$$

Это функция от трех переменных r_2, ω_1, ω_2, перепишем ее используя обозначения :

$$\widetilde{r}_2 \equiv \frac{G M_1 M_2^2 r_2}{L^2},\ \widetilde{\omega}_1 \equiv \frac{L^3(M_1+M_2)\omega_1}{G^2 M_1^3 M_2^3},\ \widetilde{\omega}_2 \equiv \frac{L^3(M_1+M_2)\omega_2}{G^2 M_1^3 M_2^3} \quad (7)$$

$$k_1 \equiv \frac{G^2 M_1^3 M_2^3 I_1}{L^4(M_1+M_2)},\ k_2 \equiv \frac{G^2 M_1^3 M_2^3 I_2}{L^4(M_1+M_2)} \quad (8)$$

1 Общий случай

$$U_{eff}(\widetilde{\omega_1}, \widetilde{\omega_2}, \widetilde{r_2}) = \frac{G^2 M_1^3 M_2^3}{L^2(M_1+M_2)}[\frac{1}{2\widetilde{r_2}^2} - \frac{1}{\widetilde{r_2}} - \frac{k_1\widetilde{\omega_1}}{\widetilde{r_2}^2} - \frac{k_2\widetilde{\omega_2}}{\widetilde{r_2}^2} + \frac{k_1\widetilde{\omega_1}^2}{2} + \frac{k_2\widetilde{\omega_2}^2}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{k_1\widetilde{\omega_1}+k_2\widetilde{\omega_2}}{\widetilde{r_2}})^2] \text{ (9!)}$$

Изучение экстремума эффективного потенциала

Обозначим далее $\alpha = \frac{G^2 M_1^3 M_2^3}{L^2(M_1+M_2)}$, $\tilde{U}_{eff} = \frac{U_{eff}}{\alpha}$.
Необходимое условие для существования экстремума в точке $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{r}_2)$:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{eff}}{\partial \tilde{\omega}_1} = \frac{\partial \tilde{U}_{eff}}{\partial \tilde{\omega}_2} = \frac{\partial \tilde{U}_{eff}}{\partial \tilde{r}_2} = 0. \qquad \text{(A1)}$$

1 Общий случай

Решим второе уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{U}_{eff}}{\partial \tilde{\omega}_2} = \tilde{\omega}_2 + \frac{k_1 \tilde{\omega}_1}{\tilde{r}_2^2} - \frac{1}{\tilde{r}_2^2} + \frac{k_2 \tilde{\omega}_2}{\tilde{r}_2^2} = 0 \Rightarrow \tilde{\omega}_2 = \frac{1 - k_1 \tilde{\omega}_1}{k_2 + \tilde{r}_2^2}. \quad \text{(A2)}$$

Это уравнение задает двумерную поверхность в пространстве координат-частот. Теперь можно подставить это решение в уравнение (A1), получив потенциал для точки на поверхности, определяемой уравнением (A2).

После подстановки получаем:

$$2\tilde{U}^S_{eff} = \frac{k_2}{\tilde{r}_2}\frac{k_1\tilde{r}_2\tilde{\omega}_1^2 - 2}{k_2+\tilde{r}_2^2} + \frac{k_1\tilde{r}_2^2\tilde{\omega}_1^2 - 2\tilde{r}_2 + (k_1\tilde{\omega}_1^2-1)^2}{k_2+\tilde{r}_2^2}. \tag{A3}$$

Теперь решим первое уравнение системы (A1):

$$\frac{\partial \tilde{U}^S_{eff}}{\partial \tilde{\omega}_1} = \frac{k_1}{k_2+\tilde{r}_2^2}(\tilde{r}_2^2\tilde{\omega}_1 + k_1\tilde{\omega}_1 + k_2\tilde{\omega}_1 - 1) = 0. \tag{A4}$$

Тогда получаем:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{k_1+k_2+\tilde{r}_2^2}. \tag{A5}$$

Комбинируя с уравнением (A2), получаем:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{k_1+k_2+\tilde{r}_2^2} = \tilde{\omega}_2 \equiv \tilde{\omega}. \tag{A6!}$$

Это уравнение задает уже кривую на поверхности, определяемой уравнением (A2), и, соответственно, в пространстве координат-частот. Частоты в экстремуме сравнялись.

1 Общий случай

Подставим (A6) в (A3). Получим:

$$2\tilde{U}^{C}_{eff} = \frac{\tilde{r}_2 - 2k_1 - 2k_2 - 2\tilde{r}_2^2}{\tilde{r}_2(k_1 + k_2 + \tilde{r}_2^2)}. \tag{A7}$$

Дифференцируя по $\tilde{r}_2$ получаем:

$$\frac{\partial \tilde{U}^{S}_{eff}}{\partial \tilde{r}_2} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{r}_2^2 + k_1 + k_2)^2 - \tilde{r}_2^3 = 0. \tag{A8!}$$

Условие на существование решений этого уравнения, можно получить геометрически, и выглядит оно так :

$$k_1 + k_2 \ \leq \ \frac{27}{256}. \tag{A9!}$$

1 Общий случай

Мы исследовали необходимое условие существование экстремума, достаточным будет знакоположительность матрицы Гессе :

$$\begin{bmatrix} \frac{1.0k_{1}^{2}}{r_{2}^{2}} + k_{1} & \frac{1.0k_{1}k_{2}}{r_{2}^{2}} & - \frac{2.0k_{1}(k_{1}w_{1}+k_{2}w_{2})}{r_{2}^{3}} + \frac{2k_{1}}{r_{2}^{3}} \\ \frac{1.0k_{1}k_{2}}{r_{2}^{2}} & \frac{1.0k_{2}^{2}}{r_{2}^{2}} + k_{2} & - \frac{2.0k_{2}(k_{1}w_{1}+k_{2}w_{2})}{r_{2}^{3}} + \frac{2k_{2}}{r_{2}^{3}} \\ - \frac{2.0k_{1}(k_{1}w_{1}+k_{2}w_{2})}{r_{2}^{3}} + \frac{2k_{1}}{r_{2}^{3}} & - \frac{2.0k_{2}(k_{1}w_{1}+k_{2}w_{2})}{r_{2}^{3}} + \frac{2k_{2}}{r_{2}^{3}} & - \frac{6k_{1}w_{1}}{r_{2}^{4}} - \frac{6k_{2}w_{2}}{r_{2}^{4}} - \frac{2}{r_{2}^{3}} + \frac{3.0(k_{1}w_{1}+k_{2}w_{2})^{2}}{r_{2}^{4}} + \frac{3}{r_{2}^{4}} \end{bmatrix}$$

Как утверждают авторы статьи, один корень уравнения (A8) всегда является седловой точкой, а другой минимумом. В статье также имеются непрезентабельные формулы для вычисления их координат.

1 Общий случай

С одной стороны мы обнаружили что в со центра масс всегда выполняется уравнение (5) : $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \frac{M_1(L - I_1\omega_1 - I_2\omega_2)}{M_2(M_1+M_2)r_2^2}$

С другой стороны в минимуме потенциальной энергии необходимо, что бы выполнялось уравнение (A6) :

$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{k_1+k_2+\tilde{r}_2^2} = \tilde{\omega}_2 \equiv \tilde{\omega}$ дополнительно воспользуемся уравнениями (7) : $\widetilde{r} \equiv \frac{GM_1M_2^2r}{L^2}$, $\widetilde{\omega} \equiv \frac{L^3(M_1+M_2)\omega}{G^2M_1^3M_2^3}$

и (8) : $k_1 \equiv \frac{G^2M_1^3M_2^3I_1}{L^4(M_1+M_2)}$, $k_2 \equiv \frac{G^2M_1^3M_2^3I_2}{L^4(M_1+M_2)}$

1 Общий случай

И окончательно получим что в минимуме эффективного потенциала выполняется следующее соотношение :

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \omega_1 = \omega_2. \tag{A10!}$$

Таким образом уравнение :

$$k_1 + k_2 \ \leq \ \frac{27}{256}. \tag{A9!}$$

Определяет достаточное условие гравитационно-приливного запирания системы

2 Частные случаи

2.1 Малая масса

Рассмотрим приближение, в котором мы пренененебрегаем размерами одного из тел, и, считаем, что $m \ll M$. В таком приближении:

$$k \equiv \frac{G^2 M^3 m^3 I}{L^4 (M+m)} \xrightarrow{m \ll M} \frac{G^2 M^2 m^3 I}{L^4}. \tag{B1}$$

В таком случае эффективный потенциал перепишется так:

$$\tilde{U}_{eff} = \frac{U_{eff} L^2}{G^2 M^2 m^3} = \frac{1}{2\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{k\tilde{\omega}}{\tilde{r}} + \frac{k\tilde{\omega}^2}{2} + \frac{k^2\tilde{\omega}^2}{2\tilde{r}^2}. \tag{B2}$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega L^3}{G^2 M^2 m}, \quad \tilde{r} = \frac{G M m^2 r}{L^2}. \tag{B3}$$

2 Частные случаи

2.2 Круговая орбита

Рассмотрим еще более простой случай, пусть спутник вращается по круговой орбите.Его угловая скорость однознано определяется следующим соотношением :

$$\dot{\phi}^2 = \frac{GM}{r^3} \tag{C1}$$

Момент импульса примет следующий вид :

$$L = mr^2\sqrt{\frac{GM}{r^3}} + I\omega \;\Leftrightarrow\; \tilde{\omega} = \frac{1-\sqrt{\tilde{r}}}{k} \tag{C2}$$

А эффективный потенциал станет зависеть лишь от одной переменной, что упростит его анализ :

$$U_eff(\tilde{r}) = \frac{G^2M^2m^3}{L^2}(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2\tilde{r}}) - \frac{\sqrt{\tilde{r}}}{k} + \frac{\tilde{r}}{2k} \tag{C3}$$

3 А работает ли это все?

3.1 Марс-Фобос

В системе возможен взаимный приливной захват, но Фобос миновал седловую точку невозврата и в скором будующем упадет на Марс.

3.2 Плутон-харон

В системе возможен взаимный приливной захват, что и наблюдается на сегодняшний день. Предсказанный период : 6.4 суток, совпадает с действительным. Предсказанное растояние между телами : 19625 км , реальное 19570 км.

3.3 Земля-Луна

В системе возможен взаимный приливной захват, что и наблюдается на сегодняшний день. Предсказанный период : 27.3 суток, совпадает с сегодняшним перодом Луны. Предсказанное растояние между телами : 384387 км , сегодняшнее 384467 км.