

НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург

Магистерская программа

"Прикладная экономика и математические методы"

Вступительный экзамен по математике – 2021

Решите следующие 10 задач из предложенных ниже. Продолжительность экзамена – 120 минут, дополнительно предоставляется 20 минут на загрузку выполненной работы в систему.

Максимальный вес каждого задания – 12 points, максимальный балл, равный 10 баллам по 10-балльной системе оценивания, можно получить, набрав 96 points и выше.

В течение экзамена абитуриентам разрешается пользоваться только письменными принадлежностями.

Задача 1. Найдите множество значений функции $g(x, y, z) \equiv 3x^2 + 2y^2 + z^2$ на множестве

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Задача 2. Дана функция

$$F(x, y) = \sqrt{x+y} - x \ln x - y \ln y, \quad (1)$$

определённая для всех векторов (x, y) с положительными координатами. Запишите уравнение касательной плоскости к графику функции, заданной уравнением (1), в точке $(x, y) = (1, 3)$.

Задача 3. Дана оптимизационная задача:

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} px + qy \quad \text{при ограничениях: } x \geq 0, y \geq 0, \left(x^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + y^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq 1, \quad (2)$$

где p, q и σ – положительные вещественные параметры. Найдите выражения для точки оптимума и оптимального значения целевой функции в задаче (2) через параметры p, q и σ .

Задача 4. Дана оптимизационная задача:

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \ln(x-1) + \ln(y+1), \quad \text{при ограничениях: } x > 1, y \geq 0, x+y \leq w, \quad (3)$$

где w – положительный вещественный параметр.

- 1) При каких значениях параметра w допустимое множество задачи (3) непусто?
- 2) При каких значениях параметра w задача (3) имеет внутреннее решение?

Задача 5. Двое индейцев, Соколиный Глаз и Ястребиный Коготь, взяли свои луки и стрелы и отправились на охоту. Известно, что Соколиный глаз поражает цель из лука в 80% случаев, а Ястребиный Коготь – лишь в 60% случаев. Вскоре охотники выследили оленя, но спугнули его и выпустили каждый по стреле ему вслед. Через некоторое время охотники обнаружили убитого оленя, поражённого ровно одной стрелой. Известно, что на расстоянии полёта стрелы от места происшествия не было ни других оленей, ни других охотников. Как охотникам поделить оленя?

Задача 6. Пусть случайные величины X и Y независимы, и каждая из них имеет стандартное нормальное распределение, а случайные величины Z и W заданы следующим образом:

$$Z = X + Y, \quad W \equiv X^2.$$

- 1) Найдите совместную плотность распределения случайного вектора (X, Z) .
- 2) Найдите условные математические ожидания $\mathbb{E}(X|Z)$ и $\mathbb{E}(X|W)$.

Задача 7. На двух заводах был проведён контроль качества выпускаемой продукции. В партии изделий, изготовленных на первом заводе, объёмом 800 изделий было найдено 3% брака, а в партии изделий, изготовленных на втором заводе, объёмом 1000 изделий было найдено 5% брака. Проверьте на уровне значимости 5% гипотезу о том, что доля брака на обоих заводах одинаковая.

Задача 8. Дана квадратичная форма

$$Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 6yz.$$

- 1) Запишите матрицу \mathbf{Q} квадратичной формы $Q(x, y, z)$. Представьте квадратичную форму $Q(x, y, z)$ в векторно-матричном виде.
- 2) Исследуйте знакоопределенность квадратичной формы $Q(x, y, z)$.
- 3) Докажите, что наименьшее и наибольшее значения, которые квадратичная форма $Q(x, y, z)$ принимает на сфере с единичным радиусом и центром в начале координат, являются собственными числами матрицы \mathbf{Q} .

Задача 9. Дано дифференциальное уравнение:

$$y''(x) = \lambda y(x), \tag{4}$$

где λ – параметр, принимающий любые вещественные значения. Выясните, при каких значениях параметра λ задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями $y(0) = y(1) = 0$ имеет хотя бы два различных решения.

Задача 10. Дано дифференциальное уравнение, где $y = y(x)$:

$$(1 - x)y' - e^{-x} + y = xy.$$

Найдите его общее решение и решите задачу Коши для начального условия: $y(2) = \ln(5)$.