Образец вступительного экзамена по математике для поступления на магистерскую программу “Прикладная экономика и математические методы” НИУ ВШЭ Санкт-Петербург

https://spb.hse.ru/ma/aemm/

Решите любые 10 задач из предложенных ниже. Продолжительность экзамена – 90 минут. В течение экзамена абитуриентам разрешается пользоваться *только письменными принадлежностями.*

Задача 1. Пусть c – параметр, принимающий любые значения в интервале $[0,1)$. Рассмотрите следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{x} \left[c\,(1-x^2)+(1-c)\ln(x^2)\right] \quad \text{при ограничениях:} \quad \sqrt{c} \le x \le 1. \tag{1}$$

При каких значениях параметра $c \in [0,1)$ задача (1) имеет внутреннее решение?

Задача 2. Рассмотрите следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} ye^x \quad \text{при ограничениях:} \quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le a, \tag{2}$$

где a – положительный вещественный параметр.

1) Изобразите на плоскости (x, y) линии уровня целевой функции задачи (2), отвечающие, соответственно, значениям 1, 2 и 3 целевой функции.

2) Найдите точку глобального максимума $(x^*(a), y^*(a))$ в задаче (2).

3) Найдите оптимальное значение $v(a) \equiv y^*(a)e^{x^*(a)}$ целевой функции в задаче (2).

4) Изобразите графики функций $x = x^*(a)$, $y = y^*(a)$ и $v = v(a)$ от параметра a.

Задача 3. Рассмотрите оптимизационную задачу:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^{1/2}+y^{1/4} \quad \text{при ограничениях:} \quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ 3x+5y \le w, \tag{3}$$

где w – положительный вещественный параметр. Для задачи (3):

1) найдите точку глобального максимума $(x^*(w), y^*(w))$;

2) изобразите на плоскости (x, y) кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$x = x^*(w), \qquad y = y^*(w).$$

3) Как изменится ответ в пункте 2), если показатели степеней при x и y в целевой функции поменять местами? А если сделать их одинаковыми (например, 1/3 и 1/3)?

Задача 4. Дано линейное диффереруциальное уравнение:

$$y'' + 5y' - 6y = x^2 + 1. \tag{4}$$

Для уравнения (4) решите следующие задачи:

1) задачу Коши с начальными условиями: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) двухточечную краевую задачу с краевыми условиями: $y(0) = 3$, $y(1) = 2$.

Определите, имеет ли уравнение (4) хотя бы одно решение, которое остаётся ограниченным при $x \to \infty$. Почему да или почему нет?

Задача 5. Пусть изменение величины $x(t)$ во времени задаётся уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x - x^2}{1 + x}. \tag{5}$$

Изобразите фазовую диаграмму динамической системы (5) на плоскости $(x, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$. С помощью этой фазовой диаграммы ответьте на следующие вопросы:

1) сколько стационарных состояний имеет динамическая система (5)?

2) сколько *локально устойчивых* стационарных состояний имеет динамическая система (5)?

Задача 6. Пусть X и Y – независимые случайные величины, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону. Определим случайную величину Z следующим образом:

$$Z \equiv X + aY,$$

где a – вещественный параметр.

1) Запишите совместную плотность распределения случайного вектора (X, Z).

2) Запишите матрицу ковариаций случайного вектора (X, Z). Найдите коэффициент корреляции между случайными величинами X и Z. Запишите уравнение линейной регрессии X на Z.

3) Найдите плотность условного распределения $Z|X$.

4) Используя результат пункта 3) и формулу Байеса, найдите плотность условного распределения $X|Z$.

5) Найдите условное математическое ожидание $\mathbb{E}\{X|Z\}$. Сравните ответ с прогнозом X по линейной регрессии на Z.

Задача 7. Пусть X – центрированная нормально распределённая случайная величина. Определим случайную величину Y следующим образом: $Y \equiv e^X$. Докажите, что математическое ожидание $\mathbb{E}\{Y\}$ является возрастающей и строго выпуклой функцией от дисперсии $\mathrm{Var}(X)$ случайной величины X.

Задача 8. Пусть случайные величины X и Z – те же, что и в Задаче 6, причём $a = 1$. Найдите вектор средних и матрицу ковариаций случайного вектора (T, U), определённого формулой:

$$\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Пусть X, Y – независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения 0 или 1 с вероятностями, соответственно, 1/2 и 1/2. Пусть Z и W – случайные величины, определённые по формулам:

$$Z \equiv \min\{X, Y\}, \qquad W \equiv \max\{X, Y\}.$$

1) Найдите индивидуальные распределения случайных величин Z и W.

2) Составьте таблицу совместного распределения случайных величин Z и W.

3) Найдите коэффициент корреляции между случайными величинами Z и W. Запишите уравнение линейной регрессии W на Z.

4) Найдите условную вероятность: $\mathbb{P}\{Z = 1 \,|\, X = 1\}$.

5) Найдите условное математическое ожидание $\mathbb{E}\{W \,|\, Z = 0\}$. Сравните ответ с прогнозом W по линейной регрессии на Z при $Z = 0$.

Задача 10. Дан неориентированный граф:

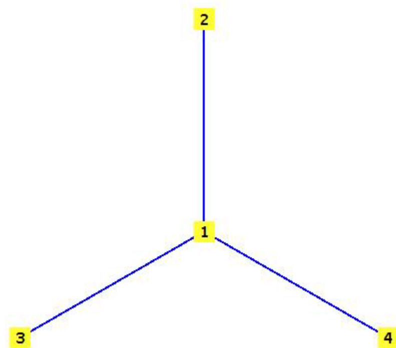

Рис. 1

1) Запишите матрицу смежности $\mathbf{G}$ графа, изображённого на рис. 1.

2) Найдите все собственные числа матрицы $\mathbf{G}$ и соответствующие им собственные векторы.

3) Проверьте, что все собственные векторы матрицы $\mathbf{G}$ попарно ортогональны.

4) Проверьте, что максимальное по модулю собственное число матрицы $\mathbf{G}$ строго положительно, и ему соответствует положительный собственный вектор.

5) Объясните, как можно решить пункты 3) — 4), не решая пункт 2).

Задача 11. Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \beta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где α, β, γ и δ – параметры.

Докажите, что у системы (6) существует бесконечно много различных частных решений, ограниченных при $t \to +\infty$, при любых вещественных значениях α, β, γ и δ.

Задача 12. Даны две студенческих группы, в одной группе (назовём ее A) 30 студентов, в другой (назовём её B) – 25 студентов. В сессию 5 студентов группы A и 5 студентов группы B завалили зачёт по математике, а остальные студенты обеих групп успешно его сдали. Проверьте на уровне значимости 5% гипотезу о том, что студенты обеих групп одинаково хорошо знают математику.

Задача 13. Дана квадратичная форма:

$$Q(x, y, z) \equiv 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 + xy + 2yz - xz.$$

1) Запишите матрицу $\mathbf{Q}$ квадратичной формы $Q(x, y, z)$. Запишите квадратичную форму $Q(x, y, z)$ в векторно-матричном виде.

2) Исследуйте знакоопределённость квадратичной формы $Q(x, y, z)$.

3) Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые квадратичная форма $Q(x, y, z)$ принимает на единичной сфере с центром в начале координат.

4) Докажите, что наибольшее и наименьшее значения $Q(x, y, z)$ на сфере, найденные в пункте 3), являются собственными числами матрицы $\mathbf{Q}$, а точки сферы, в которых эти значения достигаются, являются собственными векторами матрицы $\mathbf{Q}$.

Задача 14. В трёхмерном пространстве даны пять точек: $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 2, 3)$ и $D = (3, 2, 1)$.

1) Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки O, A и B.

2) Пусть $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ – векторы с началом в точке O и концами в точках C и D, соответственно. Найдите угол между векторами[1] $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

3) Найдите проекции векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ на плоскость, проходящую через точки O, A и B. Найдите угол между этими проекциями.

Задача 15. Дана система разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha + 1.5y_n, \\ y_{n+1} &= 5 - 0.5x_n, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ – параметр.

1) Запишите систему (7) в векторно-матричном виде.

2) Найдите стационарное состояние (x^*, y^*) системы (7).

3) Выясните, является ли отображение, задающее систему (7), сжимающим. Сделайте вывод об устойчивости стационарного состояния (x^*, y^*).

3) Подсчитайте прямой, косвенный и полный эффект от предельного изменения параметра α на стационарный уровень y^* переменной y.

[1] Угол между векторами считается найденным, если найдено значение любой тригонометрической функции от него (например, синус, или косинус, или тангенс).