**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного   
автономного образовательного учреждения высшего образования   
"Национальный исследовательский университет**

**"Высшая школа экономики"**

**Рабочая программа дисциплины**   
«Теория функций многих комплексных переменных»

для направления 01.06.01 Математика и механика

подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

образовательная программа «Математика и механика»

Разработчик(и) программы

Широков Н.А., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес информатики, [nshirokov@hse.ru](mailto:nshirokov@hse.ru)

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«16» октября 2018 г., протокол № 10

Санкт-Петербург, 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы*

1. **Область применения и нормативные ссылки**

Настоящая рабочая программа дисциплины устанавливает минимальные требования к образовательным результатам, а также определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину, и аспирантов направления подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 «Математика и механика», образовательная программа «Математика и механика».

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

* Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 «Математика и механика»
* Образовательной программой «Математика и механика»
* Учебным планом образовательной программы «Математика и механика», утвержденным в 2018 г.

1. **Цели освоения дисциплины**

Целью освоения дисциплины «Теория функций многих комплексных переменных» является развитие у аспирантов научного мышления в области изучения аналитических функций в многомерном случае, необходимых для научной деятельности.

Задачи дисциплины: формирование представлений о классических и современных понятиях, теоретических положениях и методах исследования в области многомерных функций комплексной переменной, изучение классов функциональных пространств.

1. **Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает следующие компетенции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Компетенция | Код по ОС ВШЭ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения  результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции | Форма контроля уровня сформированности компетенции |
| Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий. | ОПК-1 | Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований рамках выбранной теоретической области | Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных, работа на семинарах | Домашнее задание, аудиторная работа |
| Способность к разработке новых методов исследования их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав. | ОПК-2 | Имеет закрепленные навыки в поиске и применении различных методов решения стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задаче приемов исследования в выбранной области математики | Работа на семинарах, самостоятельное исследование с целью усовершенствования существующих методов исследований, выступление с докладом | Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен |
| Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики. | ПК-1 | Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования | Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, работа на семинаре, дискуссия | Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен |
| Способность выбрать математические модели, наилучшим образом отражающие существенные особенности случайных данных. | ПК-2 | Имеет навыки использования готовых и разработки новых математических моделей, основанных на случайных данных. Умеет проводить верификацию модели, оценивать ее достоверность адекватными методами | Работа с различными базами данных, в том числе статистическими, работа на семинаре, дискуссия | Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен |
| Способность писать научные статьи высокого качества. | ПК-4 | Имеет навыки самостоятельной исследовательской работы, в том числе с базами научных статей и научного цитирования. Умеет реферировать и анализировать теоретические и прикладные аспекты научных статей, грамотно формулировать и доказывать теоретические положения, приводить верифицирующие их примеры и контрпримеры. Знает структуру научной статьи, умеет оформлять результаты исследования в соответствии с требованиями конкретных научных изданий, умеет корректно цитировать источники | Самостоятельная работа с научными статьями по тематике исследования, работа на семинаре, презентация исследований, дискуссия, работа с базами данных. | Домашнее задание, аудиторная работа |

1. **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина относится к блоку дисциплин по выбору вариативной части образовательной программы.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

**Знать**:

* основные понятия теории функций многих комплексных переменных;
* формулировки и доказательства основных утверждений курса;
* некоторые классы функциональных пространств;
* методы исследования в области теории функций многих комплексных переменных (разложение голоморфной в полидиске функции и голоморфной области Рейнхарта функции в кратный степенной ряд, аппроксимация плюрисубгармонических функций бесконечно гладкими).

**Уметь:**

* формулировать задачу исследования;
* применять вышеуказанные методы на практике при решении конкретных задач, в частности, исследовать аналитические свойства голоморфных функций;
* использовать основные леммы и теоремы в многомерном случае (теорема Вайерштрасса, теорема Монтеля, лемма Абеля и др.).

**Владеть навыками:**

* самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
* представления результатов научного исследования в форме статьи или презентации.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Научно-исследовательский семинар.

1. **Тематический план учебной дисциплины**

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ 4 зачетные единицы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоятельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Голоморфные в области функции. | 18 | 2 | 2 | 14 |
| 2 | Свойства функций нескольких комплексных переменных | 18 | 2 | 2 | 14 |
| 3 | Плюрисубгармонические функции | 32 | 4 | 4 | 24 |
| 4 | Псевдовыпуклые области | 20 | 2 | 2 | 16 |
| 5 | Свойства аналитических функций | 32 | 4 | 4 | 24 |
| 6 | Классы функциональных пространств | 32 | 4 | 4 | 24 |
| **ИТОГО** | | **152** | **18** | **18** | **116** |

1. **Содержание дисциплины**

Раздел 1. Голоморфные в области функции.(4 часов)

Понятие о голоморфных в области функциях. Интегральная формула Коши для полидиска. Бесконечная гладкости голоморфной в области функции. Многомерная теорема Вейерштрасса для голоморфных функций. Теорема Монтеля в многомерном случае.

Разложение голоморфной в полидиске функции в кратный степенной ряд. Неравенства Коши для голоморфной в полидиске функции.

Теорема о голоморфности функции, аналитичной по каждому переменному.

Раздел 2. Свойства функций нескольких комплексных переменных. (4 часов)

Необходимые условия разрешимости системы Коши-Римана для пространства С*n*. Теорема Гартогса о продолжении голоморфных функций. Возможное продолжение голоморфной функции с границы.

Область сходимости кратного степенного ряда. Многомерная лемма Абеля. Геометрическая характеристика областей сходимости. Области Рейнхарта.

Разложение голоморфной области Рейнхарта функции в кратный степенной ряд.

Определение области голоморфности. Контрпример Гартогса. Определение *A*()– оболочки компакта.

Лемма о подвижном полидиске. Аналитическая характеристика области голоморфности. Примеры области голоморфности. Области голоморфности областей Рейнхарта.

Раздел 3. Плюрисубгармонические функции. (8 часов)

Плюрисубгармонические функции. Пример с применением области голоморфности. Условие плюрисубгармоничности для С2-гладких функций. Аппроксимация плюрисубгармонических функций бесконечно гладкими.

Раздел 4. Псевдовыпуклые области. (4 часов)

Определение *P*() оболочки компакта. Псевдовыпуклые области. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей. Локальность свойства псевдовыпуклости.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границией. Необходимость.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границей. Достаточность.

Раздел 5. Свойства аналитических функций. (8 часов)

Области Рунге. Характеристика областей Рунге.

Свойство Кузена. Лемма Ока. Следствие из леммы Ока. Теорема о равномерном приближении полиномами функций на полиномиально выпуклом компакте.

Группа когомологий области  порядка *r* с комплексными коэффициентами. Теорема об описании группы когомологий порядка для областей Рунге.

Раздел 6. Классы функциональных пространств. (8 часов)

Теорема Бохнера-Мартинелли. Случай шара в С*n*.

Ядро Бергмана. Основные свойства ядер Бергмана. Воспроизводящее свойство ядер Бергмана. Ряд для ядра Бергмана. Изменение ядра Бергамана при биголоморфном отображении. Определение метрики Бергмана в области в С*n*.

1. **Образовательные технологии**

Используются стандартные образовательные технологии, основное внимание уделяется работе с литературой, в том числе и актуальными статьями по темам. Посещение открытых научных семинаров.

* 1. **Методические рекомендации преподавателю**

Особых указаний не требуется.

* 1. **Методические указания аспирантам по освоению дисциплины**

Материалы лекций и учебники по дисциплине являются основой для изучения дисциплины. Самостоятельная работа заключается в изучении конкретных вопросов по дисциплине, используя указанный список литературы, и представлении их на семинарах в форме презентации, ответов на вопросы, дискуссии.

1. **Оценочные средства для текущего, промежуточного и итогового контроля по дисциплине**

**Формы контроля знаний аспирантов**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 2 курс | | Параметры |
| 1 полугодие | 2 полугодие |
| Текущий | Аудиторная работа | \* |  | Работа на семинаре в форме изложения материала по изученным заранее темам в рамках самостоятельной работы над предложенными темами из учебников и статей. Участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя |
| Домашнее задание | \* |  | Письменная работа.  Знание теоретического материала, методов решения задач, демонстрация знакомства с релевантной литературой |
| Итоговый | Экзамен | \* |  | Устный экзамен,  80 мин., включая подготовку |

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем оценки усвоения материала в ходе аудиторной работы на практических занятиях и лекциях. Промежуточный контроль проводится в форме домашнего задания. Итоговый контроль по дисциплине осуществляется в форме устного экзамена.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

**Текущий контроль** проводится во время интерактивного взаимодействия преподавателя и аспирантов на аудиторных занятиях. Оценивается активность аспирантов в обсуждении вынесенных на рассмотрение вопросов и заданий, демонстрация знакомства с рекомендованной литературой.

**Аудиторная работа** – участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя. В ходе аудиторной работы аспирант должен продемонстрировать умение ведения обсуждения по теме семинарского занятия и оперативного вовлечения в сформированную дискуссию по поставленным вопросам, к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики.

**Критерии оценивания и шкала оценки работы аспирантов на аудиторных занятиях**

|  |  |
| --- | --- |
| Оценка | Критерии выставления оценки |
| «Отлично»  (8-10) | Аспирант обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала; принимает активное участие в обсуждении по теме занятия; усвоил основную и дополнительную литературу, рекомендованную рабочей программой дисциплины; проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. |
| «Хорошо»  (6-7) | Аспирант обнаруживает достаточное знание учебно-программного материала и основных категорий курса; усвоил основную литературу, рекомендованную в рабочей программе дисциплины, знаком с некоторым источниками из списка дополнительной литературы. |
| «Удовлетворительно»  (4-5) | Аспирант обнаруживает знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы, в целом знаком с основной литературой, рекомендованной рабочей программой дисциплины, участвует в обсуждении недостаточно активно, не задает вопросы. |
| «Неудовлетворительно» (1-3) | Аспирант не принимает участия в обсуждении на семинарском занятии, не обнаруживает знания основного учебно-программного материала. Не демонстрирует знакомства с основной литературой |

**Домашнее задание** – письменная работа. В домашнем задании аспирант должен продемонстрировать знание основных концепций дисциплины, в форме развернутых ответов на вопросы по конкретным разделам и темам, умение решать задачи, анализировать реальные или стилизованные ситуации, а также самостоятельно применять адекватные задаче методы исследований.

**Примерный темы для домашнего задания:**

1. Многомерная теорема Вейерштрасса для голоморфных функций. Теорема о голоморфности функции, аналитичной по каждому переменному.

2. Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границией. Необходимость.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границей. Достаточность.

3. Теорема Бохнера-Мартинелли. Случай шара в С*n*.

**Критерии оценивания домашнего задания**

- полнота и развернутость ответа на поставленный вопрос – до 5-ти баллов;

- способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике – до 5-ти баллов;

- соблюдение стилистики оформления письменной работы – до 2-х баллов;

- логичность и самостоятельность в рассуждениях – до 2-х баллов.

Максимально возможное количество полученных баллов – 10 баллов.

**Итоговый контроль** по дисциплине проводится в форме устного экзамена. Экзаменационный билет содержит два вопроса. Ответ и время на подготовку – 80 мин.

На экзамене аспирант должен продемонстрировать владение основными положениями теории функций многих комплексных переменных в форме устного ответа на экзаменационные вопросы по предложенной теме.

**Примеры заданий итогового контроля**

Вопросы 1.

Теорема Гартогса о продолжении голоморфной функции. Разложение голоморфной функции в кратный степенной ряд в областях Рейнхарта.

Вопросы 2.

Аналитическая характеристика области голоморфности. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей.

Вопросы 3.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-выпуклой границей. Определение метрики Бергмана.

**Критерии оценивания и шкала оценки устного экзамена**

|  |  |
| --- | --- |
| *Оценка* | *Критерии выставления оценки* |
| «Отлично»  (8-10) | Дан полный ответ на вопрос. Имеются логичные и аргументированные выводы. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры из практики. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют глубокое знание проблемы. |
| «Хорошо»  (6-7) | Дан полный ответ на вопрос. Выводы в целом логичные и аргументированные. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры из практики. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют знание проблемы. |
| «Удовлетворительно»  (4-5) | Ответ на вопрос не является полным. Выводы не достаточно логичны, аргументы не достаточны . Примеры из практики не достаточны для подтверждения теоретических выводов. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют поверхностное знание проблемы. |
| «Неудовлетворительно» (1-3) | Ответ на вопрос не является полным/ является неправильным. Выводы не логичны, аргументы не достаточны, даны ссылки на не релевантные источники /не даны. Не приведены примеры из практики. Не продемонстрирован междисциплинарный подход к освещению вопроса. Даны неправильные/не даны ответы на дополнительные вопросы. |

1. **Порядок формирования оценки по дисциплине**

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

Накопленная оценка по дисциплине рассчитывается с помощью взвешенной суммы оценок за отдельные формы текущего контроля знаний следующим образом:

О*накопленная*= 0,7·*ОДЗ* + 0,3·*ОАР,* где

*ОДЗ* – оценка за домашнее задание;

*ОАР* – оценка за аудиторную работу.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля арифметический.

**Результирующая (итоговая) оценка по дисциплине** (которая идет в диплом)рассчитывается следующим образом:

*Орезульт = 0,8*·*Онакопленная + 0,2·Оэкз,* где

*Онакопленная* – накопленная оценка по дисциплине;

*Оэкз* – оценка за экзамен.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок – арифметический.

1. **Оценочные средства для текущего контроля и аттестации аспиранта**
   1. **Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля**

Вопросы для освоения дисциплины

1. Интегральная формула Коши для полидиска.
2. Многомерная теорема Вайерштрасса для голоморфных функций.
3. Теорема Монтеля в многомерном случае.
4. Неравенства Коши для голоморфной в полидиске функции.
5. Теорема о голоморфности функции, аналитичной по каждому переменному.
6. Необходимые условия разрешимости системы Коши-Римана для пространства С*n*.
7. Многомерная лемма Абеля.
8. Области Рейнхарта.
9. Разложение голоморфной области Рейнхарта функции в кратный степенной ряд.
10. Лемма о подвижном полидиске.
11. Аналитическая характеристика области голоморфности.
12. Условие плюрисубгармоничности для С2-гладких функций.
13. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей.
14. Локальность свойства псевдовыпуклости.
15. Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границией. Необходимость.
16. Условие Леви для псевдовыпуклых областей с С2-гладкой границей. Достаточность.
17. Характеристика областей Рунге.
18. Теорема о равномерном приближении полиномами функций на полиномиально выпуклом компакте.
19. Теорема об описании группы когомологий порядка для областей Рунге.
20. Теорема Бохнера-Мартинелли. Случай шара в С*n*.
21. Воспроизводящее свойство ядер Бергмана.
22. Определение метрики Бергмана в области в С*n*.
23. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**
    1. **Основная литература**
24. Теория функций комплексной переменной: Учебник [Электронный ресурс] / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, - 6-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.- Режим доступа по паролю: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544573> (ЭБС Znanium)
25. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : Учебник для вузов [Электронный ресурс] / И. И. Привалов. — М. : Издательство Юрайт, 2017. - Режим доступа по паролю: <https://www.biblio-online.ru/viewer/BD124E80-E07F-4A32-A790-6A689990382F#page/1> (ЭБС ЮРАЙТ).
    1. **Дополнительная литература**
26. R. Narasimhan, Analysis on Real and Complex Manifolds [Electronic Resource]. ‑ Elsevier Science, 1985. - Authorized access: <http://www.sciencedirect.com/science/bookseries/09246509/35> (Science Direct eBooks)
27. Scheidemann, Volker. Introduction to Complex Analysis in Several Variables [Electronic Resource]. - Dordrecht: Springer, 2005. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F3-7643-7491-8> (Springer eBooks)
28. Худайберганов, Г. Комплексный анализ в матричных областях [Электронный ресурс] / Г. Худайберганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов. - Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011. - Режим доступа по паролю: <http://znanium.com/bookread2.php?book=441875> (ЭБС Znanium).
    1. **Справочники, словари, энциклопедии**

Не требуется.

* 1. **Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

Не требуется.

* 1. **Программные средства**

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

* система компьютерной вёрстки LaTeX.
  1. **Информационные справочные системы**

Не используются.

* 1. **Дистанционная поддержка дисциплины**

Дистанционная поддержка дисциплины не требуется.

1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для лекций и семинаров может использоваться графический планшет и проектор.

# 13 Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться следующих варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

1) *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

2) *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

3) *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.