

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор

\_\_\_\_\_ С.Ю. Рощин

Одобрено на заседании Академического совета  
Аспирантской школы по математике  
Протокол №10 от 25.09.2018

Согласовано

Академический директор Аспирантской школы  
по математике

\_\_\_\_\_ / А.Г. Горинов/

**Программа вступительного испытания по специальности  
основной образовательной программы высшего образования – программы  
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре  
по направлению «01.06.01 – Математика и механика»**

Санкт-Петербург 2018

## 1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

## 2. Структура вступительного испытания

Вступительное испытание основной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению «01.06.01 – Математика и механика» состоит из двух частей: оценки индивидуальных достижений (конкурс портфолио) и собеседования. Вопросы для собеседования разделены по направленностям (блокам), каждая из которых соответствует научной специальности будущей научно-исследовательской работы (диссертации) абитуриента.

### 2.1. Оценка индивидуальных достижений. Структура портфолио

Для участия в конкурсе индивидуальных достижений (портфолио) абитуриент может предоставить следующие документы на русском или английском языке:

1. Резюме (CV), включающее список публикаций, сведения об участии в конференциях, школах, исследовательских проектах, научных грантах, опыте работы, знании языков и программного обеспечения и т.д.
2. Копия документа об образовании с перечнем пройденных дисциплин и оценок по этим дисциплинам. Если абитуриент еще не получил диплом магистра, необходимо приложить копию полного списка уже пройденных дисциплин с оценками.
3. Научные публикации, препринты, выпускные, курсовые и другие письменные работы.
4. Информация об участии в российских и международных конференциях (с докладом) с указанием названия и места проведения конференции и темы доклада.
5. Как минимум два рекомендательных письма.
6. Документы, подтверждающие другие достижения, например, победы в студенческих олимпиадах, конкурсах студенческих работ, получение индивидуальных академических стипендий и грантов на обучение, если таковые существуют.

### 2.2. Критерии оценки портфолио

В итоговой сумме баллов учитывается максимальная оценка из полученных за отдельные категории индивидуальных достижений: письменные работы, CV, рекомендации.

Критерий оценки	Количество баллов
Письменные работы	Максимум - 50 баллов

Тексты реферативного характера	от 0 до 10 баллов
Реферативные тексты с отдельными оригинальными результатами	от 11 до 20 баллов
Публикации в журналах из списка ВАК или препринты на английском языке в репозитории arXiv.org	от 21 до 30 баллов
Публикации, индексируемые базой Math Reviews/MathSciNet	от 31 до 40 баллов
Публикации Q1-Q2 по WoS или Scopus	от 41 до 50 баллов
По решению приемной комиссии за препринты и другие тексты может выставляться оценка, аналогичная оценкам за сопоставимые статьи.	
<b>CV</b>	<b>Максимум - 50 баллов</b>
Доклады на студенческих конференциях	От 0 до 5 баллов
Доклады на региональных конференциях	От 0 до 10 баллов
Доклады на международных конференциях	От 0 до 20 баллов
Участие в студенческих или школьных олимпиадах	От 0 до 10 баллов
Победы в студенческих или школьных олимпиадах	От 0 до 25 баллов
Участие в исследовательских проектах	От 0 до 10 баллов
Работа учебным ассистентом	От 0 до 5 баллов
Продвинутое математическое курсы (уровня магистратуры и выше)	От 0 до до 5 баллов за курс (начисляемые баллы зависят как от полученной за курс оценки, так и от положения университета в предметном рейтинге по математике)
Опыт работы с LaTeX	От 0 до 5 баллов
Опыт работы с системами компьютерной алгебры	От 0 до 10 баллов
Знание языков программирования (C++, Python, ...)	От 0 до 7 баллов
Оценка за CV равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50.	
<b>Рекомендации (как минимум 2)</b>	<b>Максимум – 50 баллов</b>
Рекомендация содержит описание научных результатов абитуриента	До 10 баллов
Рекомендатель имеет постоянную позицию в университете с высоким предметным рейтингом по математике	До 5 баллов для топ-200, до 10 баллов для топ-

	100, до 20 баллов для топ-50.
Рекомендатель считает абитуриента лучшим в определенной группе	До 10 баллов
Рекомендатель высоко оценивает мотивированность абитуриента	До 5 баллов
Рекомендатель высоко оценивает коммуникабельность, трудоспособность и другие качества абитуриента	До 5 баллов
Рекомендатель согласен быть научным руководителем абитуриента, и рекомендация содержит описание уже имеющихся наработок абитуриента по теме предполагаемой диссертации	До 35 баллов
Оценка за рекомендации равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50.	

**Для участия в конкурсе по итогам оценки индивидуальных достижений необходимо набрать суммарно не менее 15 баллов.**

### **2.3. Структура и процедура проведения собеседования**

Собеседование проходит в устной форме и состоит из двух частей:

В первой части абитуриент рассказывает о себе, о мотивах, которыми он руководствуется, выбирая математику как направление своего обучения и дальнейшей профессиональной деятельности, а также о направлении своих исследований и предполагаемой теме диссертации. На первую часть собеседования отводится 15 минут.

Во второй части оценивается теоретическая подготовленность абитуриента. Абитуриент получает два вопроса из теоретической части программы собеседования. Ему предоставляется 40 минут на подготовку и 10-15 минут на ответ. По решению приемной комиссии один или оба теоретических вопроса могут быть заменены задачами по материалу теоретической части.

Программы теоретической части собеседования для всех профилей содержатся в разделе 3 настоящего документа.

Собеседование проводится на русском или английском языке (по желанию абитуриента). По предварительному согласованию с абитуриентом собеседование может проводиться дистанционно с использованием информационных технологий.

### **2.4. Критерии оценки собеседования**

Первая часть собеседования комиссии с абитуриентом оценивается исходя из 20 баллов. Оценивается умение абитуриента проводить самостоятельные исследования, знание методов, имеющийся опыт исследовательской деятельности.

#### **Примерные вопросы:**

- Какие области математики Вас интересуют?
- Есть ли у Вас научные результаты? Если да, то опишите некоторые из них.

- Над какими задачами Вы планируете работать в случае приема в аспирантуру? Есть ли у Вас уже какие-то продвижения в решении этих задач? Если да, то какие?

Во второй части собеседования комиссия оценивает уровень математической подготовки абитуриентов. Каждый вопрос оценивается по 15-балльной шкале.

#### **Критерии оценивания**

	<b>Баллы</b>
Ответ полный, логичный, конкретный, без замечаний, продемонстрированы знания материала программы теоретической части.	12-15
Ответ логичный, конкретный, присутствуют незначительные пробелы в знания материала программы теоретической части.	8-11
Ответ неполный, отсутствует логичность повествования или допущены существенные логические ошибки.	1-7
Ответ на поставленный вопрос не дан.	0

**Для участия в конкурсе по итогам собеседования поступающим необходимо набрать не менее 10 баллов за вторую часть собеседования.**

В случае набора абитуриентами равного количества баллов (полупроходного балла), преимущества получается абитуриент, соответствующий перечисленным ниже критериями. Критерии представлены в порядке убывания значимости.

1. Более высокая оценка за письменные работы.
2. Более высокая оценка за рекомендации.
3. Более высокая оценка за вторую часть собеседования.
4. Более высокая оценка за CV.

### **3. Содержание теоретической части собеседования**

**Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю (направленности) 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»**

1. Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.
2. Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в  $R^n$ . Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.
3. Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

4. Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ , теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.
5. Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, построение меры Лебега, счетная аддитивность меры Лебега, построение интеграла Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
6. Заряды; теорема Радона-Никодима.
7. Теорема Банаха-Штейнгауза.
8. Теорема об открытом отображении. Теорема о замкнутом графике.
9. Теорема Хана-Банаха.
10. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
11. Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.
12. Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

## **Литература**

1. В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис, 1997.
2. О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2010.
3. В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО, 2007.
4. А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука, 1976.
5. Б.М. Макаров, А.Н. Подкорытов, Лекции по вещественному анализу, БХВ-Петербург, 2011.
6. У. Рудин, Функциональный анализ, СПб: Лань, 2005.
7. В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО, 1997.
8. Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. СПб: Лань, 2004.

## **Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю (направленности) 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»**

### **Раздел 1. Теория вероятностей**

#### *1. Основные понятия теории вероятностей*

- 1.1. Случайное явление в объективной реальности. Случайный эксперимент. Математическое описание случайного эксперимента.
- 1.2. Пространство элементарных событий. Алгебра и  $\sigma$  – алгебра событий. Операции над событиями и их свойства.
- 1.3. Аксиомы вероятности (система Колмогорова). Свойства вероятности.
2. *Основные вероятностные схемы*

Классическое определение вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Непрерывные вероятностные пространства.
3. *Условные вероятности и независимость*
  - 3.1. Понятие условной вероятности. Вероятность совместного осуществления событий (формула умножения вероятностей). Независимость системы событий.
  - 3.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. *Последовательность независимых испытаний*

Вероятностное описание последовательности независимых испытаний (схема Бернулли). Дискретные вероятностные распределения, связанные с последовательностью независимых испытаний.
5. *Случайные величины и распределения вероятностей*
  - 5.1. Понятие случайной величины (идея и формальное определение).
  - 5.2. Функции распределения случайных величин и их свойства.
  - 5.3. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Общее описание. Основные виды дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений.
  - 5.4. Совместные распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.
  - 5.5. Распределения функций от случайных величин.
6. *Числовые характеристики случайных величин и соответствующих вероятностных распределений*
  - 6.1. Определение математического ожидания случайной величины. Свойства математического ожидания.
  - 6.2. Определение дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии.
  - 6.3. Моменты и центральные моменты высших порядков.
  - 6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.
  - 6.5. Классические неравенства, связанные с моментами. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышева.

- 6.6. Условные математические ожидания и условные распределения вероятностей относительно отдельных событий. Условные математические ожидания относительно систем событий.
- 6.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение и его моментные характеристики.

### *7. Предельные теоремы в теории вероятностей*

- 7.1. Классические предельные теоремы в схеме независимых испытаний (локальная и интегральная).
- 7.2. Математический аппарат для доказательства предельных теорем. Производящие функции. Характеристические функции случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности. Теорема непрерывности (необходимое и достаточное условие слабой сходимости в форме сходимости характеристических функций).
- 7.3. Закон больших чисел. Закон больших чисел в форме Хинчина. Теорема о достаточных условиях применимости закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
- 7.4. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова о достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
- 7.5. Центральная предельная теорема теории вероятностей и ее различные формы. Центральная предельная теорема для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин (теорема Ляпунова). Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин. Условие Линдеберга.

### *8. Различные виды сходимости последовательностей случайных величин*

Сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, сходимость в среднем порядка  $p$ ,  $0 < p < \infty$ . Сходимость с вероятностью, равной единице (сходимость почти наверное). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связи между различными видами сходимости.

## *Раздел 2. Основы теории случайных процессов*

### *9. Понятие случайного процесса*

- 9.1. Случайный процесс как семейство случайных величин, зависящих от временного параметра. Случайный процесс как функция двух аргументов. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса.
- 9.2. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.



*10. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова)*

- 10.1. Определение марковской цепи. Различные формы марковского свойства.
- 10.2. Вероятности перехода марковской цепи и их свойства. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
- 10.3. Классификация состояний марковской цепи. Определения свойств существенности, возвратности, положительности и периодичности. Связи между свойствами существенности, возвратности и положительности для конечных и счетных марковских цепей.
- 10.4. Предельное, эргодическое и стационарное распределения марковской цепи. Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения для конечной и счетной марковских цепей.

*11. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.*

- 11.1. Определение марковского процесса.
- 11.2. Вероятности перехода марковского процесса и их свойства. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
- 11.3. Инфинитезимальные характеристики марковского процесса (интенсивности перехода и выхода из данного состояния). Соотношения между интенсивностями перехода и выхода.
- 11.4. Дифференциальные уравнения Колмогорова относительно переходных вероятностей (прямая и обратная системы).
- 11.5. Свойства траекторий марковского процесса. Распределения вероятностей, описывающие характер траекторий.
- 11.6. Процесс гибели и размножения. Основные свойства. Условия существования предельного (стационарного) распределения. Аналитическое представление для предельного распределения.
- 11.7. Пуассоновский процесс. Различные определения пуассоновского процесса. Вероятности состояний и вероятности перехода пуассоновского процесса. Свойства траекторий.

*12. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний*

- 12.1. Вероятностные характеристики марковского процесса. Вероятности перехода и их свойства. Плотности вероятностей перехода. Представление произвольных совместных распределений значений процесса через плотности вероятностей перехода.
- 12.2. Определение диффузионного процесса. Дифференциальные уравнения для диффузионного процесса: обратное уравнение Колмогорова и прямое уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка.

### *Раздел 3. Математическая статистика*

#### *13. Основные понятия математической статистики*

Задачи математической статистики. Понятие выборки. Вариационный ряд выборки. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Свойства эмпирических функций распределения. Гистограмма. Выборочные моменты. Моменты выборочных среднего и дисперсии.

#### *14. Основы теории оценивания неизвестных параметров распределений*

14.1. Понятие точечной статистической оценки. Несмещенные оценки. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.

14.2. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность оценки. Критерий Бхатгачария оптимальности оценки.

14.3. Оценки максимального правдоподобия. Определение. Уравнения правдоподобия. Общие свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия (состоятельность, асимптотическая нормальность).

14.4. Интервальное (доверительное) оценивание. Построение доверительных интервалов с использованием распределения точечной оценки параметра.

#### *15. Статистическая проверка гипотез*

15.1. Основные понятия и общие принципы теории проверки гипотез.

15.2. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия  $\chi^2$  – квадрат К. Пирсона. Критерий  $\chi^2$  – квадрат для сложной гипотезы. Критерий пустых ящиков.

15.3. Гипотеза и критерии однородности. Критерий однородности Смирнова. Критерий однородности  $\chi^2$  – квадрат.

15.4. Гипотеза независимости. Критерий независимости  $\chi^2$  – квадрат. Критерий Спирмена. Критерий Кендалла.

#### *16. Регрессионный анализ*

16.1. Модель линейной регрессии. Описание модели. Оценивание неизвестных параметров (коэффициентов регрессии) в модели линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Оптимальность оценки, полученной по методу наименьших квадратов.

16.2. Модель нормальной регрессии. Оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров нормальной регрессии. Совпадение оценок, полученных по методу наименьших квадратов, с оценками максимального правдоподобия.

16.3. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии.  $F$  – критерий для проверки линейной гипотезы.

#### *Раздел 4. Мартингалы в дискретном времени*

- 17.1. Вероятностное пространство с фильтрацией. Мартингалы, обобщённые мартингалы, мартингальные преобразования.
- 17.2. Марковские моменты. Теорема Дуба (о свободном выборе).
- 17.3. Мартингальные неравенства. Теоремы сходимости и их приложения.
- 17.4. Приложения: УЗБЧ, теорема Колмогорова о трёх рядах.

#### *Раздел 5. Стохастический анализ*

- 18.1. Винеровский процесс и его свойства.
- 18.2. Система Хаара. Конструкция винеровского процесса.
- 18.3. Свойства траекторий винеровского процесса: недифференцируемость и бесконечность вариации.
- 18.4. Конструкция винеровского интеграла для функций из  $L_2([0,1])$ .
- 18.5. Кратные винеровские интегралы.
- 18.6. Квадратично-интегрируемые мартингалы. Неравенство Дуба.
- 18.7. Интеграл Ито. Непрерывность траекторий интегралов.
- 18.8. Непрерывные семимартингалы. Формула Ито.
- 18.9. Мартингальная характеристика винеровского процесса (теорема
- 18.10. Леви).
- 18.11. Линейное стохастическое уравнение, экспоненциальные мартингалы и условия равномерной интегрируемости.
- 18.12. Теорема Гирсанова.
- 18.13. Стохастические уравнения. Сильные и слабые решения. Условия существования сильного решения. Теорема о представлении функционалов заданных на траекториях винеровского процесса.

#### **Основная литература**

1. Боровков А.А. Теория вероятностей, – М.: издательство Едиториал УРСС, 2003.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: издательство ЛКИ, 2007.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: издательство ЛКИ, 2010.
4. Чжун К.Л., АитСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. – М.: издательство Бином. Лаборатория знаний, 2007.

5. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: издательство Государственный университет – Высшая школа экономики, 2005.
6. Ширяев А.Н. Вероятность (в двух томах). – М.: издательство МЦНМО, 2007.
7. Dekking F.M., Kraaikamp G., Lopuhaa H.P., Meester L.E.. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Cambridge University Press, 2005.
8. Suhov Y., Kelbert M.. Probability and Statistics by Exemple. Cambridge University Press, 2005.

#### **Дополнительная литература**

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Издательство Физматлит, 2007.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. – М.: Издательство Дрофа, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: издательство Высшая школа, 2000.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А. В. Задачи с решениями по математической статистике. – М.: издательство Дрофа, 2007.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: энциклопедия. Главный редактор Ю.В. Прохоров. – М.: издательство Большая Российская энциклопедия. 1999.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах). –М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2010.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: издательство Дрофа, 2007.
8. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam, North – Holland, 1970.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.. Статистика случайных процессов. Наука. 1974.
10. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991.