

Пример вступительного экзамена по высшей математике. НИУ ВШЭ Санкт-Петербург

1. На плоскости даны четыре точки: $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(7, 10)$. Найдите уравнение регрессионной прямой, т.е. прямой минимизирующей среднеквадратичное отклонение при предсказании второй координаты по первой.
2. Баскетболист совершает серию из 5 бросков. Известно, что вероятность попасть первым броском равна 0.5. Если баскетболист попадает n -ным броском, то $P_{n+1} = 1.1 \cdot P_n$, а если промахивается, то $P_{n+1} = 0.9 \cdot P_n$, где P_i - вероятность попадания i -того броска. Вычислите:
 - а. вероятность того, что за первые 5 бросков баскетболист попадет ровно 3 раза.
 - б. условную вероятность того, что за первые 5 бросков баскетболист попадет ровно 3 раза, если известно, что второй бросок был успешным.
3. Известно, что $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$
 - а. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы \mathbf{A} ;
 - б. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n$
4. При кредитном скоринге вероятность признать неплатежеспособного клиента надежным - 0.1, а вероятность признать надежного клиента неплатежеспособным - 0.01. Известно, что доля неплатежеспособных клиентов в общем потоке заявок равна 1%. Банк отказывает всем и только тем, кто по результатам кредитного скоринга определен как неплатежеспособный. Вычислите долю надежных клиентов, среди тех кому банк отказал.
5. В эллипс задаваемый формулой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ впишите прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая. Укажите данную площадь и координаты вершин прямоугольника.
6. Случайная величина η принимает только натуральные значения с вероятностями $P(\eta = n) = c \frac{2^n}{n!}$. Найдите неизвестную константу c и математическое ожидание случайной величины η .
7. Для функции $f(x, y) = (x^2 + y)^{x - \ln y}$ вычислите градиент в точке $(x, y) = (3, e)$.
8. Для случайной выборки, состоящей из 100 наблюдений, извлеченных из нормальной генеральной совокупности, был получен следующий 90% доверительный интервал для математического ожидания μ : $15 < \mu < 19$. Постройте 95% доверительный интервал для этого математического ожидания. Влияет ли на ответ знаем мы дисперсию случайной величины или нет?
9. Студент, севший в электричку, с вероятностью α займет пустое место (и создаст новую группу из одного человека), а с вероятностью $1 - \alpha$ подсядет к одной из уже существующих групп увеличив ее размер на один. Во втором случае группа к которой подсядет студент выбирается с вероятностью пропорциональной числу студентов в этой группе. Зная, что процесс начался с одной группы из одного студента, определите α методом максимального правдоподобия, если в момент наблюдения вы видите 3 группы из 3, 2 и 1 студентов соответственно.
10. Сколько различных значений может принимать перестановка σ^n , где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$