Вступительный экзамен по высшей математике.
НИУ ВШЭ Санкт-Петербург. 2018. Вариант 1.

Уважаемые абитуриенты вам предлагается 12 заданий из которых вы можете выбрать любые 10. Если вы сделаете больше 10 заданий, то проверены и оценены будут только первые 10 по порядку в сданной работе.

1. Во время футбольного матча дело дошло до серии пенальти. Каждый мяч забитый в ворота соперника прибавляет к вероятности забить очередной мяч 0.1. Каждый мяч пропущеный в свои ворота уменьшает вероятность забить очередной пенальти на 0.1. Считая, что обе команды начинают с вероятности забить 0.5, вычислите вероятность, что первая команда забьет во время своего третьего удара.

2. На экзамене по математике есть 4 темы в которых 7, 6, 8 и 10 вопросов соответственно. Студент знает правильные ответы на 6, 4, 6 и 7 вопросов. В процессе экзамена ему задают по очереди два случайно выбранных вопроса из разных тем. Если студент не отвечает, то считается не сдавшим. Мы знаем, что студент не сдал экзамен, какова вероятность что его подвел вопрос из второй темы.

3. На основе семпла из нормального распределения с неизвестным средним и среднеквадратичным отклонением 1 был получен 90% доверительный интервал, равный (-1.165, -0.835).

   а. Оцените размер выборки.

   б. Найдите для этой выборки 95% доверительный интервал.

4. Решите дифференциальное уравнение $xy' = y + 2x^3$, при начальных условиях $y(1) = 3$.

5. Вычислите градиент функции $(x^2 + 2xy)^{cos(xy)+xy}$ в точке $(x, y) = (\pi, 1)$

6. Найдите глобальный максимум функции $4xy + 8xz + xy^2z^2$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Укажите все точки в которых он достигается.

7. На плоскости проведена прямая заданная уравнением $3x + 4y = 7$. Вычислите расстояние от прямой до точек $(4, 5)$, $(5, 4)$ и $(-4, 1)$ и найдите среди них ближайшую.

8. На плоскости даны четыре точки: (0, 1), (3, 7), (4, 6), (7, 9). Найдите уравнение регрессионной прямой, т.е. прямой минимизирующей среднеквадратичное отклонение при предсказании второй координаты по первой.

9. Дана смесь двух гаусианов со среднимии 0 и 3 и дисперсиями 1 и 4 соответственно. Смесь значит, то на каждом шаге с вероятностью α выбирается первый гаусиан, а с оставшейся – второй. После чего берется семпл из выбранного нормального распределения. Найдите методом максимального правдоподобия значения параметра α, если в результате 5 семплов получилась послеlовательность $2, 3.5, -0.1, 2, 0.5$.

10. Коэффициент Джини может быть расчитан по формуле $G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j|}{2n^2\bar{y}}$, где n — число домохозяйств, y_k — доля дохода домохозяйства в общем доходе, $\bar{y}$ — среднее арифметическое долей доходов домохозяйств. Известно, что доходы распределены по показательному распределению (плотность равна $\lambda \exp(-\lambda x)$ при $x > 0$), найдите математическое ожидание коэффициента Джини.

11. Известно, что $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 \\ 0.9 & 0.2 \end{pmatrix}$

    а. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы $\mathbf{A}$;

    б. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$

12. Сколько различных значений может принимать перестановка σ^n, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 9 & 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$