**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего
образования "Национальный исследовательский университет**

**"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт – Петербургская школа экономики и менеджмента

Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Департамент Прикладной математики и бизнес - информатики

**Рабочая программа дисциплины** « Линейная алгебра»

Для образовательной программы «Экономика» по направлению подготовки 38.03.01 «Финансы» для бакалавриата

*Второе высшее образование*

Автор программы: Разгуляева Людмила Николаевна, к.э.н., доцент, razgyll@mail.ru

Согласована начальником ОСУП

 «\_\_01\_\_\_»\_\_\_октября 2017 г.

Л.А.Кежун \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Утверждена академическим советом ОП «Экономика»

 «\_01\_»\_октября\_\_2017 г.

Академический руководитель ОП

В.В.Назарова

 \_

Санкт-Петербург, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая рабочая программа дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента, а также определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки 38.03.01. Экономика, обучающихся по образовательной программе «Финансы», изучающих дисциплину «Линейная алгебра».

Программа разработана в соответствии с:

* Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 38.03.01.
* Экономика https://spb.hse.ru/data/2015/09/30/1321438094/38.03.01%20Экономика.pdf
* Образовательной программ «Финансы» по направлению подготовки 38.03.01.Экономика;
* Рабочим учебным планом НИУ ВШЭ – Санкт-Петербург по направлению подготовки 38.03.01. Экономика.

# Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются

* формирование у студентов высокой математической культуры;
* овладение основными знаниями в области алгебраических расчетов и анализа данных, необходимыми в практической и учебной деятельности;
* развитие логического мышления и умения оперировать с конкретными данными, привитие навыков корректного употребления алгебраических методов решения задач;
* понимание роли алгебраической компоненты в общей подготовке специалиста в области экономики.

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

* знать методы ведения расчётов с помощью матричной алгебры, владеть приемами решения систем линейных алгебраических уравнений, строить алгебраические модели для решения практических задач в области экономики;
* иметь навыки самостоятельной работы, постоянно пополнять свои знания с целью решения экономических и финансовых задач;
* уметь решать задачи построения базиса линейного пространства, матрицы линейного преобразования.

# В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

| Компетенция | Код по НИУ | Уровеньформирования компетенции  | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции | Форма контроля сформированной компетенции |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза. | УК-3СК-Б4 | РБ, СД | Распознаёт типы (классы) задач, применяет для них адекватные методы решения.Владеет методами исследования математических моделей в профессиональной деятельности.Обосновывает результаты решения задачи. | Лекции, практические занятия.Самостоятельная работа по предложенной преподавателем методике.Чтение дополнительной литературы. | экзамен |

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к базовой части профессионального цикла по направлению 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавров, образовательная программа «Финансы».

Изучение данной дисциплины базируется на подготовке, полученной в средней школе.

Для освоения дисциплины студенты должны знать: действия с дробями, формулы сокращённого умножение, уметь решать простейшие алгебраические уравнения, иметь представление о декартовой системе координат.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Математический анализ.
* Макроэкономика.

# Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 8 зачетных единиц

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов  | Аудиторные часы | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Практические занятия |  |
| **Первый модуль.**  |
| 1 | Матрицы и определители. | 54 | 6 | 6 | 40 |
| 2 | Системы линейных алгебраических уравнений | 56 | 6 | 6 | 42 |
| 3 | Линейные пространства | 48 | 6 | 6 | 44 |
| 4 | Евклидово пространство | 42 | 4 | 4 | 34 |
| 5 | Линейные операторы | 48 | 4 | 4 | 38 |
| 6.  | Квадратичные формы | 56 | 6 | 6 | 42 |
|  | **Итого** | 304 | 32 | 32 | 240 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | Параметры \*\* |
| 1 |  |
| Текущий(неделя) | Самостоятельная работа | 5 | письменная работа 30 минут |
| Контрольная работа | 10 | Письменная работа 80 минут |
| Итоговый | Экзамен | + | письменный экзамен 80 минут |

## 7. Критерии оценки знаний, навыков

При формировании оценки текущего контроля студент должен продемонстрировать следующие знания и умения:

Письменная самостоятельная работа служит для проверки умения решать задачи с использованием матричной алгебры, а также навыков умения решать матричные уравнения. Суммарный балл самостоятельной работы составляет 10 баллов.

Письменная контрольная работа проверяет возможности студентов при исследовании совместности систем линейных уравнений, умение применять теорию для построения базисов пространств и подпространств, освоение процесса ортогонализации. Суммарный балл контрольной работы составляет 10 баллов.

Письменная экзаменационная работа разделена на две части: теоретическую и практическую. Теоретическая часть содержит два вопроса. Один из вопросов студенту предлагается изложить с доказательством и оценивается тремя баллами. За правильное изложение второго вопроса студент получает 1 балл. В практической части работы студенту предлагается решить 5 задач из различных тем. За правильное решение четырёх задач студент может получить по одному баллу и одна задача оценивается двумя баллами. Суммарный балл экзаменационной работы составляет 10 баллов.

# 8 Содержание дисциплины

**Тема 1. Матрицы и определители.**

Понятие матрицы. Основные операции над матрицами и их свойства. Понятие определителя матриц 2-го и 3-го порядка. Свойства определителя. Теорема Лапласа. Понятие определителя n-го порядка.

Транспонированная, обратная и ортогональная матрица и их свойства. Решение матричных уравнений. Теорема о базисном миноре.

**Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений.**

Понятие системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Системы линейных однородных уравнений. Понятие фундаментальной системы решений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

**Тема 3. Линейные пространства.**

Понятие линейного пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Базис и координаты в линейном пространстве. Изоморфизм линейных пространств. Понятие подпространства и линейной оболочки. Сумма и пересечение подпространств. Разложение подпространства в сумму подпространств. Преобразования координат при переходе к новому базису.

**Тема 4. Евклидово пространство.**

Определение евклидова пространства и его простейшие свойства. Неравенство Коши-Буняковского. Понятие ортонормированного базиса и его существование. Процесс ортогонализации базиса. Разложение конечномерного евклидова пространства на прямую сумму подпространства и его алгебраического дополнения.

**Тема 5. Линейные операторы.**

Понятие линейного оператора. Действия с линейными операторами. Пространство линейных операторов. Ядро и образ линейного оператора. Матричная форма записи линейного оператора. Преобразование линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора.

**Тема 6. Квадратичные формы.**

Понятие квадратичной формы. Векторно-матричная форма записи квадратичной фрмы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

При изучении всего курса используется LMS. В разделе «Материалы» имеются презентации лекций.

# 9 Образовательные технологии

Используются классические образовательные технологии

## 9.1 Методические рекомендации преподавателю

**Тематика семинарских и практических занятий.**

**1 модуль (1й курс)**

1. Алгебра событий. Элементы комбинаторики (сложение, умножение на число, произведение). Многочлен от матрицы.
2. Вычисление определителей матрицы различными способами.
3. Транспонированная и обратная матрицы. Решение матричных уравнений.
4. Ранг матрицы.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений по теореме Крамера.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
7. Решение систем линейных однородных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
8. Решение систем линейных алгебраических уравнений с параметром.
9. Исследование линейной зависимости элементов линейного пространства. Разложение элемента линейного пространства по базису .
10. Операции над подпространствами
11. Преобразование координат при переходе от одного базиса конечномерного пространства к другому.
12. Процесс ортогонализации базиса евклидова пространства.
13. Разложение евклидова пространства на подпространство и его ортогональное дополнение.
14. Матричная форма записи линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг линейного оператора.
15. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
16. Собственный числа и собственный векторы матрицы линейного оператора.
17. Линейная модель международной торговли.
18. Векторно-матричная форма записи квадратичных форм. Ранг квадратичной формы.
19. Исследование определённости квадратичной формы по критерию Сильвестра.
20. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

## 9.2 Методические указания студентам по освоению дисциплины

Для успешного освоения дисциплины «Линейная алгебра» студенту необходимо разобрать текущий материал по конспекту лекций, затем преступать к выполнению домашнего задания, полученного на практическом занятии.

При подготовке к самостоятельной или контрольной работе требуется решить задачи предложенные преподавателем в качестве примерного варианта.

## 9.3 Учебно-методическая литература для самостоятельной работы студентов

1. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата. Учебник [Электронный ресурс]. **−** М.: НИЦ ИНФРА, 2013. – Режим доступа: http://znanium.com/, свободный.

# 10 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## 10. 1 Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля

Примерный вариант самостоятельной работы.

1. Дана матрица $A=\left(\begin{matrix}0&9&-2\\4&3&-2\\1&-2&5\end{matrix}\right).$

 Вычислите матрицу $f(A)$,

 если $f\left(x\right)=x^{2}-x+6.$

1. Найдите определитель матрицы $A$:

$A=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&2\\-2&3\end{matrix}&\begin{matrix}3&4\\4&1\end{matrix}\\\begin{matrix}3&4\\4&1\end{matrix}&\begin{matrix}-1&2\\0&-5\end{matrix}\end{matrix}\right)$.

1. Решите матричное уравнение:

$$\left(\begin{matrix}1&1\\-1&2\end{matrix}\right)X=\left(\begin{matrix}4&2\\-2&1\end{matrix}\right).$$

Примерный вариант контрольной работы.

Задача 1.

(4 балла)

Матрица линейного оператора $A=\left(\begin{matrix}2&3\\1&2\end{matrix}\right)$ задана в базисе $e\_{1}=\left(3,1\right),e\_{2}=\left(-1,1\right).$

Какой вид будет иметь матрица этого оператора в базисе $e\_{1}^{'}=\left(1,-1\right),e\_{2}^{'}=\left(0,4\right)?$

Задача 2.

(2 балл)

Применяя процесс ортогонализации, постройте ортонормированный базис по заданному базису:

$a=\left(1,1,0\right),b=\left(0,1,1\right),c=\left(1,0,-2\right).$

Задача 3.

(2 балла)

Найдите базис ортогонального дополнения к подпространству, содержащему векторы

$a=\left(1,2,3,2\right),b=\left(-1,1,3,1\right),c=\left(4,1,-1,2\right)$*.*

Задача 4.

(2 балла)

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$A=\left(\begin{matrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{matrix}\right).$$

## 10.2 Примеры заданий итогового контроля.

 Примерный перечень вопросов к экзамену для самопроверки студентов.

## Операции над матрицами. Их свойства.

* 1. Свойства определителей.
	2. Разложение определителя по элементам строки (столбца).
	3. Вычисление определителей n-го порядка.
	4. Транспонированная матрица и её свойства.
	5. Обратная матрица и её свойства.
	6. Ортогональная матрица и её свойства.
	7. Решение матричных уравнений.
	8. Ранг матрицы.
	9. Линейная зависимость строк матрицы. Связь с рангом матрицы.
	10. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия. Матричная запись.
	11. Правило Крамера решения систем.
	12. Исследование системы уравнений на совместность. Теорема Кронекера-Капелли.
	13. Свойства решений однородных систем. Фундаментальная система решений.
	14. Определение линейного пространства и его свойства.
	15. Линейная зависимость элементов линейного пространства.
	16. Базис и размерность линейного пространства.
	17. Изоморфизм линейных пространств.
	18. Определение подпространства и линейной оболочки.
	19. Сумма и пересечение подпространств.
	20. Разложение подпространства на прямую сумму подпространств.
	21. Прямое и обратное преобразование базисов.
	22. Связь между преобразованием базисов и преобразованием координат.
	23. Поворот осей координат на плоскости.
	24. Определение евклидова пространства и его простейшие свойства.
	25. Неравенство Коши - Буняковского.
	26. Норма евклидова пространства.
	27. Ортонормированный базис евклидова пространства. Его свойства и существование.
	28. Алгоритм ортогонализации базиса.
	29. Разложение евклидова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
	30. Определение линейного оператора и его основные свойства.
	31. Ядро и образ линейного оператора.
	32. Матричная форма записи линейного оператора.
	33. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
	34. Собственные векторы и собственные числа матрицы линейного оператора.
	35. Определение матричная форма записи квадратичных форм.
	36. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
	37. Классификация квадратичных форм..

Часть 1 (теория).

1. (3 балл) Теорема Крамера (доказать)
2. (1 балла) Необходимое и достаточное условие диагонального вида матрицы линейного оператора.

Часть 2 (практика).

1. (2 балл) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы:

$A=\left(\begin{matrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{matrix}\right)$.

$2. $ (1 балл) Вычислите $D=2E+\left(ABC\right)^{'},$ где $A=\left(\begin{matrix}1&2&-3\\1&0&2\\4&5&3\end{matrix}\right),B=\left(\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right),C=\left(2,0,5\right).$

3. (1 балл) Решите систему методом Гаусса. Найти фундаментальную систему решений:

$$\left\{\begin{array}{c}-2x\_{1}+x\_{2}-2x\_{3}+2x\_{4}+x\_{5}=0\\x\_{1}+x\_{2}-x\_{3}+2x\_{4}-2x\_{5}=0\\-2x\_{1}-2x\_{2}+x\_{3}-x\_{4}-2x\_{5}=0\\-3x\_{1}-2x\_{3}+3x\_{4}-3x\_{5}=0\end{array}\right..$$

4. (1 балл) Используя векторы $a\_{1}=\left(1,-2,1\right), a\_{2}=\left(2,1,0\right)$ постройте ортогональный базис в трехмерном пространстве.

$5$.(1 балл) Матрица линейного оператора $A$=$\left(\begin{matrix}1&2\\3&2\end{matrix}\right)$ задана в естественном базисе.

Какой вид будет иметь матрица $A$ в новом базисе $e\_{1}^{'}=\left(-1,6\right), e\_{2}^{'}=\left(4,3\right)?$

## 11 Порядок формирования оценок по дисциплине

Форма итогового контроля четвёртого модуля 1 курса − письменный экзамен.

Все формы контроля оцениваются по 10-балльной шкале.

Накопительные оценки рассчитываются по формулам

Онакопл= 0,6$О\_{кр}$+0,4Осамраб

где Осамраб, – средняя оценка за самостоятельные работы студентов, $О\_{кр}-$ оценка, полученная за контрольную работу.

**Результирующая итоговая оценка по дисциплине за два модуля вычисляется по формуле:**

**Орезульт итог=0,5\*Онакопл+0,5\*Оэкзамен,**

**где Оэкзамен  ‑ оценка за экзамен.**

**Все оценки выставляются в виде целых чисел**, полученных по формулам, с округлением по математическим правилам округления.

# 12 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## 12.1 Основная литература

1. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. – М. Эксмо, 2006

2. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Задачи и упражнения. – М. Эксмо,2006

## 12.2 Дополнительная литература

3. Антонов В.И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект. – Проспект, 2011

4. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения. – М. Альфа-Пресс, 2009

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 10-е изд., испр. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2005

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – 6-е изд., М. ФИЗМАТЛИТ, 2005

## 12.3 Справочники, словари, энциклопедии

Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991  [1]с.: ил.

## 12.4 Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Не требуется.

## 12.5 Программные средства

Не требуются.

## 12.6 Информационные справочные системы

Не требуются.

## 12.7 Дистанционная поддержка дисциплины

## При изучении дисциплины возможно использование системы LMS. Дисциплина «Линейная алгебра». Материал содержит лекции, практических занятий, домашние задания, материалы для подготовки к контрольным работам и экзамену.

# Материально-техническое обеспечение дисциплины

При чтении лекций используется показ слайдов через проектор.