

**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного
автономного образовательного учреждения высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Департамент прикладной математики и бизнес-информатики

**Рабочая программа дисциплины
Современные вопросы теории операторов**

для направления 01.06.01 «Математика и механика»
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре,
образовательная программа «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Разработчик(и) программы
Широков Н.А., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес
информатики, nshirokov@hse.ru

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«23» октября 2017 г., протокол № 8

Санкт-Петербург, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины «Современные вопросы теории операторов» устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта, а также определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для аспирантов направления 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» и преподавателей, ведущих данную дисциплину.

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика
- Образовательной программой по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».
- Учебным планом образовательной программы «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», утвержденным в 2017 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Современные вопросы теории операторов» является развитие у аспирантов научного мышления в области функционального анализа и теории операторов, необходимых в научной деятельности, формирование высокой математической культуры.

Задачи дисциплины: формирование представлений о современных методах исследования в области функционального анализа, изучение спектральной теории линейных операторов, знакомство с различными функциональными моделями линейных операторов и их приложениями, формирование представлений о задачах и методах линейной динамики.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий.	ОПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований рамках выбранной теоретической области	Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных, работа на семинарах	Домашнее задание, аудиторная работа



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность к разработке новых методов исследования их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав.	ОПК-2	Имеет закрепленные навыки в поиске и применении различных методов решения стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задачи приемов исследования в выбранной области математики	Работа на семинарах, самостоятельное исследование с целью усовершенствования существующих методов исследований, выступление с докладом	Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики.	ПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования	Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу обязательных для аспирантов данной образовательной программы дисциплин вариативной части учебного плана.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.



В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

- основные понятия функционального анализа и спектральной теории линейных операторов;
- формулировки и доказательства основных утверждений курса;
- современные методы исследования в области теории операторов и теории функций (спектральные представления, функциональные модели).

Уметь:

- формулировать задачу исследования;
- применять вышеуказанные методы на практике при решении конкретных задач, в частности, исследовать спектральные свойства линейных операторов;
- строить функциональные модели различных классов линейных операторов.

Владеть навыками:

- самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
- презентации результатов научного исследования.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Теория функций многих комплексных переменных;
- Научно-исследовательский семинар.

5 Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 6 зачетных единиц.

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Топологические векторные пространства	24	2	2	20
2	Полнота и выпуклость	24	2	2	20
3	Банаховы пространства.	24	2	2	20
4	Двойственность в банаховых пространствах	24	2	2	20
5	Основные теоремы теории операторов	24	2	2	20
6	Гильбертово пространство	28	4	4	20
7	Ограниченные операторы	24	2	2	20
8	Неограниченные операторы	28	4	4	20
9.	Спектральная мера для неограниченных функций	28	4	4	20
ИТОГО		228	24	24	180

6 Содержание дисциплины

Раздел 1. Топологические векторные пространства



Топологические векторные пространства, сходимости в них, полунормы. Функционал Минковского. Подпространства, факторпространства. Пространства Фреше. Примеры.

Категории множеств по Бэру. Теорема Бэра.

Равностепенная непрерывность семейства линейных отображений. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о непрерывности предела линейных отображений.

Раздел 2. Полнота и выпуклость.

Теорема об открытом отображении. Теорема о замкнутом графике. Сопряженное пространство к топологическому векторному пространству. Теорема Хана-Банаха. Теорема о разделении выпуклых подмножеств.

Теорема о метризуемости компактного топологического пространства. Слабая топология в топологическом векторном пространстве.

Слабая топология в сопряженном пространстве.

Раздел 3. Банаховы пространства.

Теорема Банаха-Алаоглу. Сильная теорема о разделении выпуклых множеств в топологическом векторном пространстве. Теорема Крейна-Мильмана.

Нормирование пространства, линейные ограничения оператора в нормированном пространстве. Слабая компактность единичного шара.

Раздел 4. Двойственность в банаховых пространствах.

Второе сопряженное банахова пространства; аннуляторы подпространств. Соотношение ядра и образа сопряженных операторов. Теорема о замкнутости образа оператора. Теорема о сюръективности оператора. Компактные операторы. Критерий компактности оператора. Собственные значения оператора. Структура собственных значений компактного оператора.

Теорема о размерности аннуляторов собственных подпространств компактного оператора.

Раздел 5. Основные теоремы теории операторов.

Теорема Гротендика. Теорема Бишопа. Теорема Какутани о неподвижной точке.

Раздел 6. Гильбертово пространство.

Гильбертово пространство; операторы в гильбертовом пространстве; гильбертово сопряженное; нормальные самосопряженные унитарные операторы; проекторы. Критерии самосопряженного, нормального, унитарного оператора. Разложение единицы для семейства операторов. Спектральная теорема.

Раздел 7. Ограниченные операторы.

Спектральная теорема для нормальных операторов. Положительные операторы, квадратные корни из них. Полярное разложение оператора.

Раздел 8. Неограниченные операторы.

Неограниченные замкнутые операторы. Операторы, допускающие замыкание. Сопряженный оператор к ограниченному. Приводящие пространства. Ортогональная сумма операторов. Приводящее пространство оператора и его сопряженного. Дефектное число, спектр и резольвента замкнутого оператора.

Аналитичность резольвенты. Свойства спектра компактных операторов. Преобразование Кэли. Характеристика симметричных операторов через преобразования Кэли. Формулы Неймана для областей значения сопряженного оператора и симметричного расширения оператора.

Раздел 9. Спектральная мера для неограниченных функций.

Интеграл по спектральной мере для неограниченных функций.

Спектральная теорема для унитарных операторов. Спектральная теорема для самосопряженных операторов.

Прямой интеграл гильбертовых пространств. Связь операторов умножения с разложимыми операторами. Разложение спектральной меры на абсолютно непрерывную и сингулярную части.



7 Образовательные технологии

Аудиторные занятия проводятся в форме интерактивных лекций и семинарских занятий, организованных в форме научных дискуссий. Используются элементы технологии проблемного обучения.

8 Оценочные средства для текущего, промежуточного и итогового контроля по дисциплине

Формы и сроки контроля знаний аспирантов

Тип контроля	Форма контроля	1 курс		Параметры
		1 полугодие	2 полугодие	
Текущий	Аудиторная работа	*	*	Участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя
	Домашнее задание	1		Письменная работа. Знание теоретического материала, методов решения задач, демонстрация знакомства с релевантной литературой
Итоговый	Экзамен		1	Устный экзамен, 80 мин., включая подготовку

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем оценки усвоения материала в ходе аудиторной работы на семинарских занятиях и лекциях, а также в форме домашнего задания. Итоговый контроль по дисциплине осуществляется в форме устного экзамена.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

Текущий контроль проводится во время интерактивного взаимодействия преподавателя и аспирантов на аудиторных занятиях. Оценивается активность аспирантов в обсуждении вынесенных на рассмотрение вопросов и заданий, демонстрация знакомства с рекомендованной литературой.

Аудиторная работа – участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя и других аспирантов. В ходе аудиторной работы аспирант должен продемонстрировать активность в обсуждении поставленных проблем в области фундаментальной и/или прикладной математики, знание программного материала и литературы по обсуждаемым темам.

Критерии оценивания и шкала оценки работы аспирантов на аудиторных занятиях

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Аспирант обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала; принимает активное участие в обсуждении по теме занятия; усвоил основную и дополнительную литературу, рекомендованную рабочей программой дисциплины; проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.



«Хорошо» (6-7)	Аспирант обнаруживает достаточное знание учебно-программного материала и основных категорий курса; усвоил основную литературу, рекомендованную в рабочей программе дисциплины, знаком с некоторыми источниками из списка дополнительной литературы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Аспирант обнаруживает знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы, в целом знаком с основной литературой, рекомендованной рабочей программой дисциплины, участвует в обсуждении не достаточно активно, не задает вопросы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Аспирант не принимает участия в обсуждении на семинарском занятии, не обнаруживает знания основного учебно-программного материала. Не демонстрирует знакомства с основной литературой

Домашнее задание – письменная работа. В домашнем задании аспирант должен продемонстрировать знание основных концепций дисциплины, в форме развернутых ответов на вопросы по конкретным разделам и темам, умение решать задачи, анализировать реальные или стилизованные ситуации, а также самостоятельно применять адекватные задаче методы исследований.

Тематика вопросов для домашнего задания

1. Подпространства, факторпространства. Пространства Фреше.
2. Теорема о непрерывности предела линейных отображений
3. Теорема Хана-Банаха.
4. Теорема о метризуемости компактного топологического пространства.
5. Слабая топология в сопряженном пространстве.
6. Сильная теорема о разделении выпуклых множеств в топологическом векторном пространстве.
7. Нормирование пространства, линейные ограничения оператора в нормированном пространстве.
8. Соотношение ядра и образа сопряженных операторов.
9. Теорема о замкнутости образа оператора.
10. Компактные операторы.
11. Теорема Гротендика.
12. Теорема Какутани о неподвижной точке.
13. Гильбертово пространство; операторы в гильбертовом пространстве;
14. Спектральная теорема.
15. Полярное разложение оператора.
16. Неограниченные замкнутые операторы.
17. Приводящее пространство оператора и его сопряженного.
18. Дефектное число, спектр и резольвента замкнутого оператора.
19. Свойства спектра компактных операторов.
20. Преобразование Кэли.
21. Формулы Неймана для областей значения сопряженного оператора и симметричного расширения оператора.
22. Интеграл по спектральной мере для неограниченных функций.
23. Прямой интеграл гильбертовых пространств.
24. Связь операторов умножения с разложимыми операторами.



25. Разложение спектральной меры на абсолютно непрерывную и сингулярную части.

Критерии оценивания домашнего задания

- полнота и развернутость ответа на поставленный вопрос – до 3-х баллов;
- способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике – до 3-х баллов;
- соблюдение стилистики оформления письменной работы – до 2-х баллов;
- логичность и самостоятельность в рассуждениях – до 2-х баллов.

Максимально возможное количество полученных баллов – 10 баллов.

Итоговый контроль по дисциплине проводится в форме устного экзамена. Экзаменационный билет содержит два вопроса. Оценкой за экзамен является среднее арифметическое оценок за два вопроса. Округление оценки в пользу аспиранта. Ответ и время на подготовку – 80 мин.

Тематика вопросов для экзамена:

1. Теорема Банаха-Штейнгауза.
2. Теорема о разделении выпуклых подмножеств.
3. Теорема Крейна-Мильмана.
4. Теорема о размерности аннуляторов собственных подпространств компактного оператора.
5. Спектральная теорема для нормальных операторов.
6. Разложение спектральной меры на абсолютно непрерывную и сингулярную части.

Критерии оценивания и шкала оценки устного экзамена

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан полный ответ на вопрос. Имеются логичные и аргументированные выводы. Примеры достаточны для подтверждения теоретических выводов. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют глубокое знание проблемы.
«Хорошо» (6-7)	Дан достаточно полный ответ на вопрос. Выводы в целом логичные и аргументированные. Примеры достаточны для подтверждения теоретических выводов. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют знание проблемы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Выводы не достаточно логичны, аргументы не достаточны. Примеры не достаточны для подтверждения теоретических выводов. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют поверхностное знание проблемы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Ответ на вопрос не является полным/ является неправильным. Выводы не логичны, аргументы не достаточны, даны ссылки на нерелевантные источники /не даны. Не приведены примеры. Даны неправильные/не даны ответы на дополнительные вопросы.



9 Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка по дисциплине рассчитывается с помощью взвешенной суммы оценок за отдельные формы текущего контроля знаний следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0,7 \cdot O_{\text{ДЗ}} + 0,3 \cdot O_{\text{АР}}, \text{ где}$$

$O_{\text{ДЗ}}$ – оценка за домашнее задание;

$O_{\text{АР}}$ – оценка за аудиторную работу.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля - арифметический.

Результирующая оценка по дисциплине рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0,8 \cdot O_{\text{накопленная}} + 0,2 \cdot O_{\text{ЭКЗ}}, \text{ где}$$

$O_{\text{накопленная}}$ – накопленная оценка по дисциплине;

$O_{\text{ЭКЗ}}$ – оценка за экзамен.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок – арифметический.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Основная литература

1. Grosse-Erdmann K.-G., Peris Manguillot A., Linear Chaos, Universitext [Electronic resource]. - Springer, London, 2011. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4471-2170-1> (Springer eBooks).
2. Hsing, Tailen, and Randall L. Eubank. Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operations [Electronic resource]. - 2015. - Authorized access: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/hselibrary-ebooks/detail.action?docID=1991870> (Online Digital Library "Ebrary")

10.2 Дополнительная литература

1. Petris, Giovanni, Sonia Petrone, and Patrizia Campagnoli Dynamic Linear Models with R. [Electronic resource]. - New York, NY: Springer New York, 2009. - . - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2Fb135794> (Springer eBooks)
2. Nair, M T. Linear Operator Equations: Approximation and Regularization. [Electronic resource]. - Hackensack : World Scientific, 2009. - . - Authorized access: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/hselibrary-ebooks/detail.action?docID=477214> (Online Digital Library "Ebrary")
3. Лекции по функциональному анализу: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.И. Сухинов, И.П. Фирсов. - Ростов н/Д: Издательство ЮФУ, 2009. - Режим доступа по паролю: <http://znanium.com/bookread2.php?book=549858> (ЭБС Znanium)
4. Müller, Vladimir. Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras [Electronic resource].- Basel: Birkhäuser, 2007. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-7643-8265-0> (Springer eBooks)



10.3 Справочники, словари, энциклопедии

Не требуется.

10.4 Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Не требуется.

10.5 Программные средства

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

– система компьютерной вёрстки LaTeX.

10.6 Информационные справочные системы

Не используются.

10.7 Дистанционная поддержка дисциплины

Дистанционная поддержка дисциплины не требуется.

11 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для лекций и семинаров может использоваться проектор.