

**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного  
автономного образовательного учреждения высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента  
Национального исследовательского университета  
«Высшая школа экономики»

Департамент прикладной математики и бизнес-информатики

**Рабочая программа дисциплины**  
**Методы научных исследований в математике**

для направления 01.06.01 «Математика и механика»  
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре,  
образовательная программа «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Разработчик(и) программы

Прасолов А.В., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес информатики, [aprasolov@hse.ru](mailto:aprasolov@hse.ru)

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«23» октября 2017 г., протокол № 8

Санкт-Петербург, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины «Методы научных исследований в математике» устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта, а также определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для аспирантов направления 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» и преподавателей, ведущих данную дисциплину. Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика
- Образовательной программой по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».
- Учебным планом образовательной программы «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», утвержденным в 2017 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы научных исследований в математике» является знакомство с основными концепциями профилей обучения, формирование навыков проведения научных исследований в различных областях математики, подготовка к сдаче кандидатского экзамена по профилю подготовки.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий.	ОПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований рамках выбранной теоретической области	Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных, работа на семинарах	Домашнее задание, аудиторная работа
Способность к разработке новых методов исследования их	ОПК-2	Имеет закрепленные навыки в поиске и применении различных методов решения	Работа на семинарах, самостоятельное исследование с целью усовершенствования	Домашнее задание, участие в дискуссии на аудиторных заня-



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав.		стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задаче приемов исследования в выбранной области математики	существующих методов исследований, выступление с докладом	тнях, кандидатский экзамен
Способность следовать этическим нормам в профессиональной деятельности.	ОПК-7	Обладает знанием принципов академической и профессиональной этики, умеет связывать научное творчество с ответственностью за результат	Работа с литературой, в том числе грамотное цитирование источников, работа на семинарах, презентация самостоятельного исследования	Домашнее задание, аудиторная и самостоятельная работа, кандидатский экзамен
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики.	ПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования	Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, аудиторная работа, кандидатский экзамен
Способность вы-	ПК-2	Имеет навыки использования готовых	Работа с различными базами данных, в том	Домашнее задание, аудиторная



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
брать математические модели, наилучшим образом отражающие существенные особенности случайных данных.		и разработки новых математических моделей, основанных на случайных данных. Умеет проводить верификацию модели, оценивать ее достоверность адекватными методами	числе статистическими, работа на семинаре, дискуссия	работа, кандидатский экзамен
Способность исследовать универсальные математические закономерности, лежащие в основе моделей случайных явлений, и прилагать эти закономерности к изучению свойств конкретных вероятностных моделей.	ПК-3	Имеет навыки анализа исходных, в том числе случайных, данных и факторов и агрегации их взаимодействия в рамках математической модели. Умеет формулировать теоретические положения, отражающие закономерности случайных явлений и доказывать их, верифицировать свойства вероятностных моделей	Самостоятельная работа с научными статьями по тематике случайных явлений и процессов, работа на семинаре, презентация исследований, дискуссия	Домашнее задание, аудиторная работа, кандидатский экзамен

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу обязательных для аспирантов данной образовательной программы дисциплин вариативной части.

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.

Для освоения учебной дисциплины, аспиранты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

##### **Знать:**

- основные методы проведения научных исследований в областях математики, связанные с профилем (направленностью) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

##### **Уметь:**

- применять в исследовательской деятельности изученные методы;
- формулировать задачу исследования.

##### **Владеть навыками:**

- самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;



- представления результатов научного исследования в форме статьи или презентации.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Теория функций многих комплексных переменных;
- Стохастическое исчисление;
- Научно-исследовательский семинар.

## 5 Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 3 зачетные единицы.

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Ортогональные полиномы	20	2	2	16
2	Носителя меры на компактах	20	2	2	16
3	Теоремы об оценках	24	4	4	16
4	Диффузионные процессы	24	4	4	16
5	Распределение функционалов от броуновского движения	26	4	4	18
<b>ИТОГО</b>		<b>114</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>82</b>

## 6 Содержание дисциплины

### Раздел 1. Ортогональные полиномы.

Ортогональные полиномы по конечной борелевской мере; минимальная емкость относительно носителя меры; борелевской мере; минимальная емкость относительно носителя меры функции Грина; связь с обычной емкостью и функцией Грина области.

### Раздел 2. Носителя меры на компактах.

Равновесные распределения минимальные относительно носителя меры на компактах; строение соответствующих функций Грина; минимальный носитель.

### Раздел 3. Теоремы об оценках.

Общая теорема об оценке сверху произвольной последовательности полиномов через минимальную емкость относительно носителя меры функцию Грина.

Теорема о реализации верхней оценки для ортогональных по мере полиномов.

Оценка снизу для произвольных ортогональных полиномов через классическую функцию Грина.

Оценка снизу на компакте частичного произведения ортогонального полинома.

Оценка для старших коэффициентов ортогональных по мере полиномов.

Построение меры, для которой реализуется нижняя оценка асимптотике ортогональных по этой мере полиномов.

Построение примера меры, для ортогональных полиномов, для которой в асимптотике имеются строгие неравенства.

Локализация нулей ортогональных полиномов. Пример меры, сосредоточенной на полуокружности.

Связь между слабым пределом вероятностных мер, построенных по нулям ортогональных полиномов, и асимптотикой старших коэффициентов этих полиномов.

### Раздел 4. Диффузионные процессы.



Обобщением броуновского движения являются диффузионные процессы. К пониманию необходимости рассматривать диффузионные процессы, по-видимому, раньше пришли физики, чем математики. Ярким примером тому служит уравнение Эйнштейна-Смолуховского, описывающее движение легкой частицы в вязкой жидкости. С одной стороны, хаотичное движение молекул жидкости в результате соударений частицей придает ей неупорядоченные перемещения, а с другой, вязкость ограничивает скорость такого перемещения. Эти два фактора и были учтены при возникновении стохастического дифференциального уравнения Эйнштейна-Смолуховского. строгое математическое определение диффузионных процессов дал А.Н. Колмогоров. После появления стохастического исчисления выяснилось, что при некоторых предположениях определенные А.Н. Колмогоровым диффузионные процессы являются решениями соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

Дано определение марковского процесса и определена переходная вероятность марковского процесса. Важное значение имеет выражение конечномерных распределений марковского процесса через начальное распределение и переходную вероятность. Дано определение диффузионного процесса. Сформулированы и доказаны достаточные условия диффузионности. Устанавливается, что решение стохастического дифференциального уравнения является марковским процессом. При определенных условиях диффузионные процессы как раз и являются решением стохастических дифференциальных уравнений. Установлена связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии. Рассмотрены однородные диффузионные процессы и отвечающие им стохастические дифференциальные уравнения. Приведено вероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.

#### Раздел 5. Распределение функционалов от броуновского движения.

Детально изложен общий подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения. Доказываются результаты, позволяющие вычислять распределение интегральных функционалов от броуновского процесса (формула Фейнмана-Каца) и функционалов инфимума и супремума броуновского процесса. Приводятся примеры использования этих результатов для эффективного вычисления явных формул для распределений некоторых функционалов от броуновского движения. Рассмотрен метод вычисления условных распределений функционалов при условии, что конец траектории фиксирован (вычисления распределений функционалов от броуновского моста). Наряду с распределениями функционалов в фиксированный момент времени, изложен подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала. Такие результаты находят применение в теории страхования (вычисление вероятностей разорения) и в финансовой математике. Доказана теорема о замене меры (преобразование Гирсанова), которая имеет многочисленные приложения. В качестве одного из таких приложений выводятся результаты о распределении функционалов от броуновского движения с линейным сносом.

## **7 Образовательные технологии**

Аудиторные занятия проводятся в форме интерактивных лекций и семинарских занятий, организованных в форме научных дискуссий.

### **7.1 Методические указания аспирантам по освоению дисциплины**

Материалы лекций и учебники из списка рекомендованной литературы по дисциплине являются основой для изучения дисциплины. Самостоятельная работа заключается в изучении конкретных вопросов по дисциплине и представлении их на семинарах в форме презентации, ответов на вопросы, дискуссии по теме занятия.



## 8 Оценочные средства для текущего, промежуточного и итогового контроля по дисциплине

### Формы и сроки контроля знаний аспирантов

Тип контроля	Форма контроля	1 курс		Параметры
		1 полугодие	2 полугодие	
Текущий	Аудиторная работа	*	*	Участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя и других аспирантов.
	Домашнее задание	1		Письменная работа. Представление теоретического материала, решение задач, демонстрация знакомства с релевантной литературой
Итоговый	Кандидатский экзамен		1	Устный экзамен. Проводится в соответствии с правилами, регламентирующими проведение кандидатского экзамена.

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем оценки усвоения материала в ходе аудиторной работы на практических занятиях и лекциях, а также в форме домашнего задания. Итоговый контроль по дисциплине осуществляется в форме кандидатского экзамена.

**Текущий контроль** проводится во время интерактивного взаимодействия преподавателя и аспирантов на аудиторных занятиях. Оценивается активность студентов в обсуждении вынесенных на рассмотрение вопросов и заданий, демонстрация знакомства с рекомендованной литературой.

**Аудиторная работа** – участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя. В ходе аудиторной работы аспирант должен продемонстрировать умение ведения обсуждения по теме семинарского занятия и оперативного вовлечения в сформированную дискуссию по поставленным вопросам, к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики.

### Критерии оценивания и шкала оценки работы аспирантов на аудиторных занятиях

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Аспирант обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала; принимает активное участие в обсуждении по теме занятия; усвоил основную и дополнительную литературу, рекомендованную рабочей программой дисциплины; проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.
«Хорошо» (6-7)	Аспирант обнаруживает достаточное знание учебно-программного материала и основных категорий курса; усвоил основную литературу, рекомендованную в рабочей программе дисциплины, знаком с некоторыми источниками из списка дополнительной литературы.



«Удовлетворительно» (4-5)	Аспирант обнаруживает знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы, в целом знаком с основной литературой, рекомендованной рабочей программой дисциплины, участвует в обсуждении недостаточно активно, не задает вопросы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Аспирант не принимает участия в обсуждении на семинарском занятии, не обнаруживает знания основного учебно-программного материала. Не демонстрирует знакомства с основной литературой

**Домашнее задание** – письменная работа. В домашнем задании аспирант должен продемонстрировать знание основных концепций дисциплины, в форме развернутых ответов на вопросы по конкретным разделам и темам, умение решать задачи, анализировать реальные или стилизованные ситуации, а также самостоятельно применять адекватные задаче методы исследований.

#### **Примерные темы для домашнего задания:**

1. Ортогональные полиномы по конечной борелевской мере
2. Равновесные распределения минимальные относительно носителя меры на компактах; строение соответствующих функций Грина; минимальный носитель.
3. Теорема о реализации верхней оценки для ортогональных по мере полиномов.
4. Оценка снизу для произвольных ортогональных полиномов через классическую функцию Грина.
5. Оценка снизу на компакте частичного произведения ортогонального полинома.
6. Оценка для старших коэффициентов ортогональных по мере полиномов.
7. Построение примера меры, для ортогональных полиномов, для которой в асимптотике имеются строгие неравенства.
8. Локализация нулей ортогональных полиномов. Пример меры, сосредоточенной на полуокружности.
9. Связь между слабым пределом вероятностных мер, построенных по нулям ортогональных полиномов, и асимптотикой старших коэффициентов этих полиномов.
10. Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения.
11. Строгое математическое определение диффузионных процессов по А.Н. Колмогорову.
12. Достаточные условия диффузионности.
13. Связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии.
14. Вероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.
15. Вычислению распределений функционалов от броуновского движения.
16. Доказательство результатов, позволяющих вычислять распределение интегральных функционалов от броуновского процесса (формула Фейнмана-Каца) и функционалов инфимума и супремума броуновского процесса.
17. Подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала.
18. Применение вычислению распределений функционалов от броуновского движения в теории страхования (вычисление вероятностей разорения) и в финансовой математике.
19. Теорема о замене меры (преобразование Гирсанова).

#### **Критерии оценивания домашнего задания**

- полнота и развернутость ответа на поставленный вопрос – до 3-х баллов;





- способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике – до 3-х баллов;
- соблюдение стилистики оформления письменной работы – до 2-х баллов;
- логичность и самостоятельность в рассуждениях – до 2-х баллов.

Максимально возможное количество полученных баллов – 10 баллов.

**Итоговый контроль** по дисциплине осуществляется в форме устного экзамена (кандидатский экзамен)

Экзаменационный билет содержит два вопроса. Оценкой за экзамен является среднее арифметическое оценок за два вопроса. Округление оценки в пользу аспиранта. Ответ и время на подготовку – 80 мин.

#### Тематика вопросов для кандидатского экзамена

1. Минимальная емкость относительно носителя меры
2. Минимальная емкость относительно носителя меры функции Грина;
3. Строение функций Грина относительно носителя меры на компактах
4. Общая теорема об оценке сверху произвольной последовательности полиномов через минимальную относительно носителя меры функцию Грина.
5. Теорема о реализации верхней оценки для ортогональных по мере полиномов.
6. Оценка снизу на компакте частичного произведения ортогонального полинома.
7. Оценка для старших коэффициентов ортогональных по мере полиномов.
8. Построение примера меры, для ортогональных полиномов, для которой в асимптотике имеются строгие неравенства.
9. Локализация нулей ортогональных полиномов.
10. Связь между слабым пределом вероятностных мер, построенных по нулям ортогональных полиномов, и асимптотикой старших коэффициентов этих полиномов.
11. Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения.
12. Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения.
13. Стохастическое дифференциальное уравнение Эйнштейна-Смолуховского.
14. Строгое математическое определение диффузионных процессов по А.Н. Колмогорову.
15. Марковские процессы и переходная вероятность марковского процесса.
16. Достаточные условия диффузионности.
17. Связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии.
18. Вероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.
19. Вычислению распределений функционалов от броуновского движения.
20. Эффективное вычисление явных формул для распределений некоторых функционалов от броуновского движения.
21. Метод вычисления условных распределений функционалов при условии, что конец траектории фиксирован (вычисления распределений функционалов от броуновского моста).
22. Подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала.
23. Распределение функционалов от броуновского движения с линейным сносом.

#### Критерии оценивания и шкала оценки устного экзамена

Оценка	Критерии выставления оценки
--------	-----------------------------



«Отлично» (8-10)	Дан полный ответ на вопрос. Имеются логичные и аргументированные выводы. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют глубокое знание проблемы.
«Хорошо» (6-7)	Дан полный ответ на вопрос. Выводы в целом логичные и аргументированные. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют знание проблемы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Выводы не достаточно логичны, аргументы не достаточны. Примеры не достаточны для подтверждения теоретических выводов. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют поверхностное знание проблемы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Ответ на вопрос не является полным/ является неправильным. Выводы не логичны, аргументы не достаточны, даны ссылки на не релевантные источники /не даны. Не приведены примеры. Даны неправильные/не даны ответы на дополнительные вопросы.

## 9 Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка по дисциплине рассчитывается с помощью взвешенной суммы оценок за отдельные формы текущего контроля знаний следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0,5 \cdot O_{\text{ДЗ}} + 0,5 \cdot O_{\text{АР}}, \text{ где}$$

$O_{\text{ДЗ}}$  – оценка за домашнее задание,

$O_{\text{АР}}$  – оценка за аудиторную работу.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля - арифметический.

**Результующая оценка по дисциплине  $O_{\text{результ}}$**  выставляется как оценка за **кандидатский экзамен** и рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0,2 \cdot O_{\text{накопленная}} + 0,8 \cdot O_{\text{экз}}, \text{ где}$$

$O_{\text{накопленная}}$  – накопленная оценка по дисциплине;

$O_{\text{экз}}$  – оценка за задания кандидатского экзамена.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок – арифметический.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

Результирующая оценка выставляется по 5-балльной шкале в соответствии с таблицей соответствия:

5-балльная шкала	10-балльная шкала
Отлично	10
	9
	8



Хорошо	7
	6
Удовлетворительно	5
	4
Неудовлетворительно	3
	2
	1

## 10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 10.1 Основная литература

1. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. СПб. : Изд-во «Лань», 2015.
2. Синкевич Г.И. От метода каскадов к изучению свойств непрерывных функций: историческая хроника [Электронный ресурс] //Вопросы истории естествознания и техники, № 4, Том 36, 2015, с. 642-664. - Режим доступа по паролю: <https://dlib.eastview.com/browse/doc/46014222> (East View Journals).

### 10.2 Дополнительная литература

1. Krantz, Steven G. A Guide to Functional Analysis [Electronic resource] / Steven G. Krantz. - Washington : Mathematical association of America, 2013.- . - Authorized access: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/hselibrary-ebooks/detail.action?docID=3330378> (Online Digital Library "Ebrary")
2. Willem Michel Functional Analysis: Fundamentals and Applications [Electronic resource] / M. Willem. - Springer, 2013. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4614-7004-5> (Springer eBooks)

### 10.3 Программные средства

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

- система компьютерной вёрстки LaTeX.

## 11 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для лекций и семинаров может использоваться проектор.