

**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного  
автономного образовательного учреждения высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента  
Национального исследовательского университета  
«Высшая школа экономики»

Департамент прикладной математики и бизнес-информатики

**Рабочая программа дисциплины  
«Стохастическое исчисление»**

для направления 01.06.01 Математика и механика  
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре,  
образовательная программа «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Разработчик(и) программы

Широков Н.А., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес информатики, [nshirokov@hse.ru](mailto:nshirokov@hse.ru)

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике

«23» октября 2017 г., протокол № 8

Санкт-Петербург, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта, а также определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для аспирантов направления 01.06.01 «Математика и механика» профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» и преподавателей, ведущих данную дисциплину.

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика
- Образовательной программой по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».
- Учебным планом образовательной программы «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», утвержденным в 2017 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Стохастическое исчисление» является формирование у аспирантов вероятностного мышления и приобретение научных знаний в области теории случайных процессов, необходимых для научной деятельности.

Задачи дисциплины: освоение современного аппарата теории случайных процессов, изучение различных методов исследования в области стохастического анализа, теории диффузионных процессов и теории распределений функционалов от случайных процессов.

## 3 Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины аспирант развивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий.	ОПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований в рамках выбранной теоретической области	Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных, работа на семинарах	Домашнее задание, аудиторная работа
Способность к разработке но-	ОПК-2	Имеет закрепленные навыки в поис-	Работа на семинарах, самостоятельное ис-	Домашнее задание, аудиторная



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
вых методов исследования их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав.		ке и применении различных методов решения стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задаче приемов исследования в выбранной области математики	следование с целью усовершенствования существующих методов исследований, выступление с докладом	работа, экзамен
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики.	ПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования	Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен
Способность выбрать математические модели, наилучшим образом отражающие существенные особенности слу-	ПК-2	Имеет навыки использования готовых и разработки новых математических моделей, основанных на случайных данных. Умеет	Работа с различными базами данных, в том числе статистическими, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, аудиторная работа, экзамен



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
чайных данных.		проводить верификацию модели, оценивать ее достоверность адекватными методами		
Способность писать научные статьи высокого качества.	ПК-4	Имеет навыки самостоятельной исследовательской работы, в том числе с базами научных статей и научного цитирования. Умеет реферировать и анализировать теоретические и прикладные аспекты научных статей, грамотно формулировать и доказывать теоретические положения, приводить верифицирующие их примеры и контрпримеры. Знает структуру научной статьи, умеет оформлять результаты исследования в соответствии с требованиями конкретных научных изданий, умеет корректно цитировать источники	Самостоятельная работа с научными статьями по тематике исследования, работа на семинаре, презентация исследований, дискуссия, работа с базами данных.	Домашнее задание

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу дисциплин по выбору вариативной части для направления 01.06.01 «Математика и механика», профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.

В результате освоения дисциплины аспирант должен

**Знать:**

- основные положения теории мартингалов как основного аппарата стохастического исчисления;



- определения и основные свойства стохастического интеграла по броуновскому движению и диффузионных процессов;
- формулировку и доказательство формулы стохастического дифференцирования, теоремы о существовании и единственности решения стохастического дифференциального уравнения, а также базовых результатов теории распределений функционалов от случайных процессов.

**Уметь:**

- применять результаты теории мартингалов для доказательства сходимости случайных процессов в различных вероятностных моделях;
- преобразовывать стохастические дифференциальные уравнения;
- находить решения линейных стохастических дифференциальных уравнений;
- вычислять явные формулы для распределений некоторых функционалов от броуновского движения и от других известных диффузий (бесселевских процессов и процесса Орнштейна-Уленбека);
- осуществлять замену меры для некоторых классических диффузий.

**Владеть навыками:**

- самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
- презентации результатов научного исследования.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Научно-исследовательский семинар.

## 5 Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 4 зачетные единицы.

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Случайные процессы. Основные понятия.	38	6	6	26
2	Основные классы случайных процессов.	38	6	6	26
3	Мартингалы.	38	6	6	26
4	Стохастические интегралы. Стохастические дифференциальные уравнения.	38	6	6	26
<b>ИТОГО</b>		<b>152</b>	<b>24</b>	<b>24</b>	<b>104</b>

## 6 Содержание дисциплины

### Раздел 1. Случайные процессы. Основные понятия.

Изложены базовые понятия, составляющие основу теории случайных процессов. Определение вероятностного пространства и случайных величин. Условные математические ожидания относительно  $\sigma$ -алгебр (приводятся примеры). Определение случайного процесса как семейства случайных величин, зависящего от параметра. Случайные последовательности, процессы с непрерывным временем и случайные поля. Эквивалентность случайных процессов. Модификации случайных процессов. Прогрессивно измеримые процессы Траектории случайных процессов конечномерные распределения. Теорема (А.Н. Колмогорова) о непрерывности траекторий. Оценка модуля непрерывности для случайных процессов и полей.

### Раздел 2. Основные классы случайных процессов.



К каким классам относятся мартингалы, марковские случайные процессы, процессы с независимыми приращениями, гауссовские и стационарные процессы. Описаны основные свойства этих процессов. Указаны взаимосвязи между этими процессами. Приведены характеризационные свойства для этих процессов. Значение теории мартингалов трудно переоценить. В последнее время мартингалы находят приложения даже за рамками теории вероятностей, например, в математическом анализе. Марковское свойство лежит в основе такого механизма случайного изменения, который ближе всего ко многому из того, что происходит в реальной действительности. Процессы с независимыми приращениями и гауссовские процессы являются предельными для многих классов нормированных сумм независимых случайных величин (сумм малых случайных возмущений). Детально изучается процесс броуновского движения. Можно без всякого преувеличения сказать, что броуновское движение является основным случайным процессом.

### Раздел 3. Мартингалы.

Дается определение мартингалов, субмартингалов и изучаются основные их свойства. Рассматриваются случайные моменты останова и их свойств. Мартингалы являются действенным аппаратом теории случайных процессов. Они эффективны при оценке супремумов случайных процессов и при доказательстве теорем о сходимости. Основные результаты этой теории таковы. Теорема (Дж. Дуба) о преобразовании свободного выбора. Неравенство (Дж. Дуба) для субмартингалов. разложение (Дж. Дуба) для субмартингалов. Квадратичная характеристика мартингала. Теорема о числе пересечений субмартингалом полосы  $(a, b)$ . Теорема (Дж. Дуба) о сходимости субмартингалов.

### Раздел 4. Стохастические интегралы. Стохастические дифференциальные уравнения.

Основы стохастического исчисления были заложены японским математиком К. Ито. На начальном этапе создания этой теории практически невозможно предвидеть, насколько плодотворной она окажется. Ее роль для теории случайных процессов можно сравнить с ролью дифференциального исчисления для математического анализа и других дисциплин. Теория стохастических дифференциальных уравнений явилась естественным развитием теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Стохастические интегралы по броуновскому движению, траектории которого имеют неограниченную вариацию, принципиально отличаются от классических интегралов. Это приводит к тому, что стохастические дифференциалы от композиций гладких функций с решениями стохастических дифференциальных уравнений зависят от вторых производных функций, находящихся под знаком дифференциала, что абсолютно невозможно в классическом анализе.

Дано определение и изучены свойства стохастического интеграла по броуновскому движению. Особое внимание уделено свойствам стохастического интеграла как функции верхнего предела, поскольку она лежит в основе развития всей теории. Представлены различные варианты формулы (К. Ито) стохастического дифференцирования. Центральное место занимает теорема о существовании и единственности решений стохастического дифференциального уравнения.

## **7 Образовательные технологии**

Аудиторные занятия проводятся в форме интерактивных лекций и семинарских занятий, организованных в форме научных дискуссий. Используются элементы технологии проблемного обучения.

## **8 Оценочные средства для текущего, промежуточного и итогового контроля по дисциплине**

### **Формы и сроки контроля знаний аспирантов**

Тип контроля	Форма контроля	2 курс		Параметры
		1 полугодие	2 полугодие	
Текущий	Самостоятель-	*	*	Работа на семинаре в форме из-



	ная работа			ложения материала по изученным заранее темам в рамках самостоятельной работы над предложенными темами из учебников и статей
	Домашнее задание	1		Письменная работа. Представление теоретического материала, методов решения задач, демонстрация знакомства с релевантной литературой
Итоговый по дисциплине	Экзамен		1	Устный экзамен

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем оценки усвоения материала в ходе аудиторной работы на семинарских занятиях и лекциях, а также в форме домашнего задания. Итоговый контроль по дисциплине осуществляется в форме устного экзамена.

**Текущий контроль** проводится во время интерактивного взаимодействия преподавателя и аспирантов на аудиторных занятиях. Оценивается активность аспирантов в обсуждении вынесенных на рассмотрение вопросов и заданий, демонстрация знакомства с рекомендованной литературой.

**Аудиторная работа** – участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя. В ходе аудиторной работы аспирант должен продемонстрировать умение ведения обсуждения по теме семинарского занятия и оперативного вовлечения в сформированную дискуссию по поставленным вопросам, готовность использовать полученные знания в научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики.

#### Критерии оценивания и шкала оценки работы аспирантов на аудиторных занятиях

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Аспирант обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала; принимает активное участие в обсуждении по теме занятия; усвоил основную и дополнительную литературу, рекомендованную рабочей программой дисциплины; проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.
«Хорошо» (6-7)	Аспирант обнаруживает достаточное знание учебно-программного материала и основных категорий курса; усвоил основную литературу, рекомендованную в рабочей программе дисциплины, знаком с некоторыми источниками из списка дополнительной литературы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Аспирант обнаруживает знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы, в целом знаком с основной литературой, рекомендованной рабочей программой дисциплины, участвует в обсуждении не достаточно активно, не задает вопросы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Аспирант не принимает участия в обсуждении на семинарском занятии, не обнаруживает знания основного учебно-программного материала. Не демонстрирует знакомства с основной



**Домашнее задание** – письменная работа. В домашнем задании аспирант должен продемонстрировать знание основных концепций дисциплины, в форме развернутых ответов на вопросы по конкретным разделам и темам, умение решать задачи, анализировать реальные или стилизованные ситуации, а также самостоятельно применять адекватные задаче методы исследований.

Примерные вопросы для домашнего задания

1. Вероятностные пространства и случайные величины.
2. Условные математические ожидания относительно  $\sigma$ -алгебр. Привести примеры.
3. Случайные последовательности, процессы с непрерывным временем и случайные поля.
4. Траектории случайных процессов конечномерные распределения.
5. Марковские случайные процессы, процессы с независимыми приращениями, гауссовские и стационарные процессы.
6. Мартингалы, субмартингалы, их свойства.
7. Теорема (Дж. Дуба) о преобразовании свободного выбора.
8. Квадратичная характеристика мартингала.
9. Стохастических дифференциальных уравнений как естественное развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
10. Стохастические интегралы по броуновскому движению.
11. Различные варианты формулы (К. Ито) стохастического дифференцирования.
12. Теорема о существовании и единственности решений стохастического дифференциального уравнения.
13. Диффузионные процессы как обобщение броуновского движения.
14. Стохастическое дифференциальное уравнение Эйнштейна-Смолуховского.
15. Строгое математическое определение диффузионных процессов по А.Н. Колмогорову.
16. Марковские процессы и переходная вероятность марковского процесса.
17. Достаточные условия диффузионности.
18. Связь коэффициентов стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами сноса и диффузии.
19. Вероятностное решение задачи Коши (решение уравнения теплопроводности) и задачи Дирихле.
20. Вычислению распределений функционалов от броуновского движения.
21. Доказательство результатов, позволяющие вычислять распределение интегральных функционалов от броуновского процесса (формула Фейнмана-Каца) и функционалов инфимума и супремума броуновского процесса.
22. Эффективное вычисление явных формул для распределений некоторых функционалов от броуновского движения.
23. Метод вычисления условных распределений функционалов при условии, что конец траектории фиксирован (вычисления распределений функционалов от броуновского моста).
24. Подход к вычислению распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в момент выхода на границу интервала.
25. Применение вычислению распределений функционалов от броуновского движения в теории страхования (вычисление вероятностей разорения) и в финансовой математике.
26. Теорема о замене меры (преобразование Гирсанова).
27. Распределение функционалов от броуновского движения с линейным сносом.

**Критерии оценивания домашнего задания**

- полнота и развернутость ответа на поставленный вопрос – до 3-х баллов;





- способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике – до 3-х баллов;
- соблюдение стилистики оформления письменной работы – до 2-х баллов;
- логичность и самостоятельность в рассуждениях – до 2-х баллов.

Максимально возможное количество полученных баллов – 10 баллов.

**Итоговый контроль** по дисциплине проводится в форме устного экзамена. Экзаменационный билет содержит два вопроса. Оценкой за экзамен является среднее арифметическое оценок за два вопроса. Округление оценки в пользу аспиранта. Ответ и время на подготовку – 80 мин.

На экзамене аспирант должен продемонстрировать владение основными положениями стохастического исчисления в форме устного ответа на экзаменационные вопросы по предложенной теме.

#### Тематика заданий для итогового контроля (устного экзамена)

1. Теорема (А.Н. Колмогорова) о непрерывности траекторий.
2. Оценка модуля непрерывности для случайных процессов и полей.
3. Неравенство (Дж. Дуба) для субмартингалов.
4. Разложение (Дж. Дуба) для субмартингалов.
5. Теорема о числе пересечений субмартингалом полосы (a, b).
6. Теорема (Дж. Дуба) о сходимости субмартингалов.
7. Стохастические интегралы по броуновскому движению, траектории которого имеют неограниченную вариацию.
8. Свойствам стохастического интеграла как функции верхнего предела.
9. Теорема о существовании и единственности решений стохастического дифференциального уравнения

#### Критерии оценивания и шкала оценки устного экзамена

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан полный ответ на вопрос. Имеются логичные и аргументированные выводы. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют глубокое знание проблемы.
«Хорошо» (6-7)	Дан полный ответ на вопрос. Выводы в целом логичные и аргументированные. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют знание проблемы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Выводы не достаточно логичны, аргументы не достаточны. Примеры не достаточны для подтверждения теоретических выводов. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют поверхностное знание проблемы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Ответ на вопрос не является полным/ является неправильным. Выводы не логичны, аргументы не достаточны, даны ссылки на нерелевантные источники /не даны. Не приведены примеры. Даны неправильные/не даны ответы на дополнительные вопросы.



## 9 Порядок формирования оценок по дисциплине

**Накопленная оценка по дисциплине** рассчитывается с помощью взвешенной суммы оценок за отдельные формы текущего контроля знаний следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0,7 \cdot O_{\text{ДЗ}} + 0,3 \cdot O_{\text{АР}}, \text{ где}$$

$O_{\text{ДЗ}}$  – оценка за домашнее задание;

$O_{\text{АР}}$  – оценка за аудиторную работу.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля - арифметический.

**Результующая оценка по дисциплине** (которая идет в диплом) рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0,8 \cdot O_{\text{накопленная}} + 0,2 \cdot O_{\text{экс}}, \text{ где}$$

$O_{\text{накопленная}}$  – накопленная оценка по дисциплине;

$O_{\text{экс}}$  – оценка за экзамен.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок – арифметический.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

## 10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 10.1 Основная литература

1. Kallianpur G., Sundar P. Stochastic Analysis and Diffusion Processes [Electronic Resource]. - Oxford University Press, 2014. - Authorized access: <http://www.oxfordscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001/acprof-9780199657063> (Oxford Scholarship Online).

### 10.2 Дополнительная литература

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н., Теория случайных процессов [Электронный ресурс]. - Физматлит, Москва, 2003. - Режим доступа по паролю: <http://znanium.com/bookread2.php?book=544606> (ЭБС Znanium)
2. Chung, Kai L, and John B. Walsh. Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry [Electronic Resource]. - Berlin: Springer, 2004. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F0-387-28696-9> (Springer eBooks)
3. Cecconi, Jaures. Stochastic Differential Equations [Electronic resource]. - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-11079-5> (Springer eBooks)
4. Korolyuk, Vladimir V. Modern Stochastics and Applications [Electronic resource]. - Springer, 2014. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-03512-3> (Springer eBooks)
5. Biagini, Francesca. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications [Electronic resource]. London: Springer, 2008. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-84628-797-8> (Springer eBooks)
6. Le, Gall J.-F. Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus [Electronic resource]. Cham: Springer, 2016. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-31089-3> (Springer eBooks).



7. Uwe Hassler, Bihn. Stochastic Processes and Calculus: An Elementary Introduction with Applications [Electronic resource]. - Springer, 2016. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-23428-1> (Springer eBooks).

### **10.3 Программные средства**

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

– система компьютерной вёрстки LaTeX.

## **11 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для лекций и семинаров может использоваться проектор.