

**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного  
автономного образовательного учреждения высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет Санкт-Петербургская школа экономики и менеджмента  
Национального исследовательского университета  
«Высшая школа экономики»

Департамент прикладной математики и бизнес-информатики

**Рабочая программа дисциплины  
«Теория функций многих комплексных переменных»**

для направления 01.06.01 Математика и механика  
подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре,  
образовательная программа «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Разработчик(и) программы

Широков Н.А., д.ф.-м.н., профессор департамента прикладной математики и бизнес информатики, [nshirokov@hse.ru](mailto:nshirokov@hse.ru)

Согласована Академическим советом Аспирантской школы по математике  
«23» октября 2017 г., протокол № 8

Санкт-Петербург, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям аспиранта по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика», профиль 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину и аспирантов направления подготовки 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика

Образовательной программой по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика, профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Учебным планом образовательной программы «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», утвержденным в 2017 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Теория функций многих комплексных переменных» является развитие у аспирантов научного мышления в области изучения аналитических функций в многомерном случае, необходимых для научной деятельности.

Задачи дисциплины: формирование представлений о классических и современных понятиях, теоретических положениях и методах исследования в области многомерных функций комплексной переменной, изучение классов функциональных пространств.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины аспирант осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике, математической физике, информатике, в том числе с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий.	ОПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов и интерпретации результатов исследований в рамках выбранной теоретической области	Поиск и обработка информации в различных источниках, работа с базами данных, работа на семинарах	Домашнее задание, самостоятельная и аудиторная работа



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способность к разработке новых методов исследования их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в математике, математической физике, информатике с учетом правил соблюдения авторских прав.	ОПК-2	Имеет закрепленные навыки в поиске и применении различных методов решения стандартных и открытых задач, самостоятельному выбору и усовершенствованию адекватных задаче приемов исследования в выбранной области математики	Работа на семинарах, самостоятельное исследование с целью усовершенствования существующих методов исследований, выступление с докладом	Домашнее задание, участие в дискуссии, экзамен
Способность к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики, в частности, в областях математической логики, алгебры, теории чисел, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, математической физики.	ПК-1	Имеет закрепленные навыки по постановке исследовательских вопросов, интерпретации и презентации результатов исследований в рамках выбранной теоретической или прикладной области математики. Умеет привлекать аппарат смежных математических направлений для решения задач конкретного исследования	Поиск и обработка информации в различных областях математики, в том числе с научными статьями и базами научного цитирования, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, самостоятельная и аудиторная работа, экзамен
Способность выбрать математические модели, наилучшим образом отражающие	ПК-2	Имеет навыки использования готовых и разработки новых математических моделей, основанных на случайных данных. Умеет	Работа с различными базами данных, в том числе статистическими, работа на семинаре, дискуссия	Домашнее задание, самостоятельная и аудиторная работа, экзамен



Компетенция	Код по ОС ВШЭ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
существенные особенности случайных данных.		проводить верификацию модели, оценивать ее достоверность адекватными методами		
Способность писать научные статьи высокого качества.	ПК-4	Имеет навыки самостоятельной исследовательской работы, в том числе с базами научных статей и научного цитирования. Умеет реферировать и анализировать теоретические и прикладные аспекты научных статей, грамотно формулировать и доказывать теоретические положения, приводить верифицирующие их примеры и контрпримеры. Знает структуру научной статьи, умеет оформлять результаты исследования в соответствии с требованиями конкретных научных изданий, умеет корректно цитировать источники	Самостоятельная работа с научными статьями по тематике исследования, работа на семинаре, презентация исследований, дискуссия, работа с базами данных.	Домашнее задание, самостоятельная работа

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу обязательных дисциплин вариативной части для направления 01.06.01 «Математика и механика», профиль (направленность) «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, умениях и навыках, сформированных на двух предшествующих уровнях высшего образования в части математической подготовки.

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

##### Знать:

- основные понятия теории функций многих комплексных переменных;
- формулировки и доказательства основных утверждений курса;
- некоторые классы функциональных пространств;
- методы исследования в области теории функций многих комплексных переменных (разложение голоморфной в полидиске функции и голоморфной области Рейнхарта функции



в кратный степенной ряд, аппроксимация плюрисубгармонических функций бесконечно гладкими).

**Уметь:**

- формулировать задачу исследования;
- применять вышеуказанные методы на практике при решении конкретных задач, в частности, исследовать аналитические свойства голоморфных функций;
- использовать основные леммы и теоремы в многомерном случае (теорема Вайерштрасса, теорема Монтеля, лемма Абеля и др.).

**Владеть навыками:**

- самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
- представления результатов научного исследования в форме статьи или презентации.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Научно-исследовательский семинар.

**5 Тематический план учебной дисциплины**

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 4 зачетные единицы.

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Голоморфные в области функции.	22	4	4	14
2	Свойства функций нескольких комплексных переменных	26	4	4	18
3	Плюрисубгармонические функции	26	4	4	18
4	Псевдовыпуклые области	26	4	4	18
5	Свойства аналитических функций	26	4	4	18
6	Классы функциональных пространств	26	4	4	18
<b>ИТОГО</b>		<b>152</b>	<b>24</b>	<b>24</b>	<b>104</b>

**6 Содержание дисциплины**

Раздел 1. Голоморфные в области функции.

Понятие о голоморфных в области функциях. Интегральная формула Коши для полидиска. Бесконечная гладкости голоморфной в области функции. Многомерная теорема Вайерштрасса для голоморфных функций. Теорема Монтеля в многомерном случае.

Разложение голоморфной в полидиске функции в кратный степенной ряд. Неравенства Коши для голоморфной в полидиске функции.

Теорема о голоморфности функции, аналитичной по каждому переменному.

Раздел 2. Свойства функций нескольких комплексных переменных.

Необходимые условия разрешимости системы Коши-Римана для пространства  $C^n$ . Теорема Гартогса о продолжении голоморфных функций. Возможное продолжение голоморфной функции с границы.

Область сходимости кратного степенного ряда. Многомерная лемма Абеля. Геометрическая характеристика областей сходимости. Области Рейнхарта.

Разложение голоморфной области Рейнхарта функции в кратный степенной ряд.



Определение области голоморфности. Контрпример Гартогса. Определение  $A(\Omega)$ – оболочки компакта.

Лемма о подвижном полидиске. Аналитическая характеристика области голоморфности. Примеры области голоморфности. Области голоморфности областей Рейнхарта.

Раздел 3. Плюрисубгармонические функции

Плюрисубгармонические функции. Пример с применением области голоморфности. Условие плюрисубгармоничности для  $C^2$ -гладких функций. Аппроксимация плюрисубгармонических функций бесконечно гладкими.

Раздел 4. Псевдовыпуклые области.

Определение  $P(\Omega)$  - оболочки компакта. Псевдовыпуклые области. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей. Локальность свойства псевдовыпуклости.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с  $C^2$ -гладкой границей. Необходимость.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с  $C^2$ -гладкой границей. Достаточность.

Раздел 5. Свойства аналитических функций.

Области Рунге. Характеристика областей Рунге.

Свойство Кузена. Лемма Ока. Следствие из леммы Ока. Теорема о равномерном приближении полиномами функций на полиномиально выпуклом компакте.

Группа когомологий области  $\Omega$  порядка  $r$  с комплексными коэффициентами. Теорема об описании группы когомологий порядка для областей Рунге.

Раздел 6. Классы функциональных пространств.

Теорема Бохнера-Мартинелли. Случай шара в  $C^n$ .

Ядро Бергмана. Основные свойства ядер Бергмана. Воспроизводящее свойство ядер Бергмана. Ряд для ядра Бергмана. Изменение ядра Бергмана при биголоморфном отображении. Определение метрики Бергмана в области в  $C^n$ .

## 7 Образовательные технологии

Используются стандартные образовательные технологии, основное внимание уделяется работе с литературой, в том числе и актуальными статьями по темам. Посещение открытых научных семинаров.

### 7.1 Методические рекомендации преподавателю

Особых указаний не требуется.

### 7.2 Методические указания аспирантам по освоению дисциплины

Материалы лекций и учебники по дисциплине являются основой для изучения дисциплины. Самостоятельная работа заключается в изучении конкретных вопросов по дисциплине и представлении их на семинарах в форме презентации, ответов на вопросы, дискуссии.

## 8 Оценочные средства для текущего, промежуточного и итогового контроля по дисциплине

### Формы контроля знаний аспирантов

Тип контроля	Форма контроля	2 курс		Параметры
		1 полугодие	2 полугодие	
Текущий	Аудиторная работа	*	*	Работа на семинаре в форме изложения материала по изученным заранее темам в рамках самостоятельной работы над



				предложенными темами из учебников и статей. Участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя
	Домашнее задание	1		Письменная работа. Знание теоретического материала, методов решения задач, демонстрация знакомства с релевантной литературой
Итоговый	Экзамен		1	Устный экзамен, 80 мин., включая подготовку

Текущий контроль по дисциплине осуществляется путем оценки усвоения материала в ходе аудиторной работы на семинарских занятиях и лекциях, а также в форме домашнего задания. Итоговый контроль по дисциплине осуществляется в форме устного экзамена.

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

**Текущий контроль** проводится во время интерактивного взаимодействия преподавателя и аспирантов на аудиторных занятиях. Оценивается активность аспирантов в обсуждении вынесенных на рассмотрение вопросов и заданий, демонстрация знакомства с рекомендованной литературой.

**Аудиторная работа** – участие в обсуждениях по теме семинарского занятия, ответы на вопросы преподавателя. В ходе аудиторной работы аспирант должен продемонстрировать умение ведения обсуждения по теме семинарского занятия и оперативного вовлечения в сформированную дискуссию по поставленным вопросам, к научно-исследовательской деятельности в области фундаментальной и/или прикладной математики.

#### Критерии оценивания и шкала оценки работы аспирантов на аудиторных занятиях

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Аспирант обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала; принимает активное участие в обсуждении по теме занятия; усвоил основную и дополнительную литературу, рекомендованную рабочей программой дисциплины; проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.
«Хорошо» (6-7)	Аспирант обнаруживает достаточное знание учебно-программного материала и основных категорий курса; усвоил основную литературу, рекомендованную в рабочей программе дисциплины, знаком с некоторыми источниками из списка дополнительной литературы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Аспирант обнаруживает знания основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы, в целом знаком с основной литературой, рекомендованной рабочей программой дисциплины, участвует в обсуждении не достаточно активно, не задает вопросы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Аспирант не принимает участия в обсуждении на семинарском занятии, не обнаруживает знания основного учебно-программного материала. Не демонстрирует знакомства с основной



литературой

**Домашнее задание** – письменная работа. В домашнем задании аспирант должен продемонстрировать знание основных концепций дисциплины, в форме развернутых ответов на вопросы по конкретным разделам и темам, умение решать задачи, анализировать реальные или стилизованные ситуации, а также самостоятельно применять адекватные задаче методы исследований.

**Примеры для домашнего задания:**

Задание 1.

Теорема Гартогса о продолжении голоморфной функции. Разложение голоморфной функции в кратный степенной ряд в областях Рейнхарта.

Задание 2.

Аналитическая характеристика области голоморфности. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей.

Задание 3.

Условие Леви для псевдовыпуклых областей с  $C^2$ -выпуклой границей. Определение метрики Бергмана.

**Критерии оценивания домашнего задания**

- полнота и развернутость ответа на поставленный вопрос – до 3-х баллов;
- способность проводить теоретические и экспериментальные исследования в математике – до 3-х баллов;
- соблюдение стилистики оформления письменной работы – до 2-х баллов;
- логичность и самостоятельность в рассуждениях – до 2-х баллов.

Максимально возможное количество полученных баллов – 10 баллов.

**Итоговый контроль** по дисциплине проводится в форме устного экзамена. Экзаменационный билет содержит два вопроса. Ответ и время на подготовку – 80 мин.

На экзамене аспирант должен продемонстрировать владение основными положениями теории функций многих комплексных переменных в форме устного ответа на экзаменационные вопросы по предложенной теме.

**Тематика вопросов для итогового контроля**

1. Интегральная формула Коши для полидиска.
2. Многомерная теорема Вайерштрасса для голоморфных функций.
3. Теорема Монтеля в многомерном случае.
4. Неравенства Коши для голоморфной в полидиске функции.
5. Теорема о голоморфности функции, аналитичной по каждому переменному.
6. Необходимые условия разрешимости системы Коши-Римана для пространства  $C^n$ .
7. Многомерная лемма Абеля.
8. Области Рейнхарта.
9. Разложение голоморфной области Рейнхарта функции в кратный степенной ряд.
10. Лемма о подвижном полидиске.
11. Аналитическая характеристика области голоморфности.
12. Условие плюрисубгармоничности для  $C^2$ -гладких функций.
13. Аналитическая характеристика псевдовыпуклых областей.
14. Локальность свойства псевдовыпуклости.
15. Условие Леви для псевдовыпуклых областей с  $C^2$ -гладкой границей. Необходимость.



16. Условие Леви для псевдовыпуклых областей с  $C^2$ -гладкой границей. Достаточность.
17. Характеристика областей Рунге.
18. Теорема о равномерном приближении полиномами функций на полиномиально выпуклом компакте.
19. Теорема об описании группы когомологий порядка для областей Рунге.
20. Теорема Бохнера-Мартинелли. Случай шара в  $C^n$ .
21. Воспроизводящее свойство ядер Бергмана.
22. Определение метрики Бергмана в области в  $C^n$ .

### Критерии оценивания и шкала оценки устного экзамена

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан полный ответ на вопрос. Имеются логичные и аргументированные выводы. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры из практики. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют глубокое знание проблемы.
«Хорошо» (6-7)	Дан полный ответ на вопрос. Выводы в целом логичные и аргументированные. Даны ссылки на использованную при подготовке к экзамену литературу. Приведены примеры из практики. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют знание проблемы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Выводы не достаточно логичны, аргументы не достаточны. Примеры из практики не достаточны для подтверждения теоретических выводов. Ответы на дополнительные вопросы демонстрируют поверхностное знание проблемы.
«Неудовлетворительно» (1-3)	Ответ на вопрос не является полным/ является неправильным. Выводы не логичны, аргументы не достаточны, даны ссылки на не релевантные источники /не даны. Не приведены примеры из практики. Не продемонстрирован междисциплинарный подход к освещению вопроса. Даны неправильные/не даны ответы на дополнительные вопросы.

## 9 Порядок формирования оценки по дисциплине

Оценки по всем формам контроля выставляются по 10-балльной шкале.

Накопленная оценка по дисциплине рассчитывается с помощью взвешенной суммы оценок за отдельные формы текущего контроля знаний следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0,7 \cdot O_{\text{ДЗ}} + 0,3 \cdot O_{\text{АР}}, \text{ где}$$

$O_{\text{ДЗ}}$  – оценка за домашнее задание;

$O_{\text{АР}}$  – оценка за аудиторную работу.

Способ округления накопленной оценки текущего контроля - арифметический.

**Результирующая оценка по дисциплине** (которая идет в диплом) рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0,8 \cdot O_{\text{накопленная}} + 0,2 \cdot O_{\text{экз}}, \text{ где}$$



$O_{\text{накопленная}}$  – накопленная оценка по дисциплине;

$O_{\text{экз}}$  – оценка за экзамен.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок – арифметический.

## 10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 10.1 Основная литература

1. Теория функций комплексной переменной: Учебник [Электронный ресурс] / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, - 6-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.- Режим доступа по паролю: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=544573> (ЭБС Znanium)
2. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : Учебник для вузов [Электронный ресурс] / И. И. Привалов. — М. : Издательство Юрайт, 2017. - Режим доступа по паролю: <https://www.biblio-online.ru/viewer/BD124E80-E07F-4A32-A790-6A689990382F#page/1> (ЭБС ЮРАЙТ).

### 10.2 Дополнительная литература

1. Scheidemann, Volker. Introduction to Complex Analysis in Several Variables [Electronic Resource]. - Dordrecht: Springer, 2005. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F3-7643-7491-8> (Springer eBooks)
2. Худайбергенов, Г. Комплексный анализ в матричных областях [Электронный ресурс] / Г. Худайбергенов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов. - Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011 <http://znanium.com/bookread2.php?book=441875> (ЭБС Znanium).

### 10.3 Программные средства

В рамках освоения дисциплины аспирант может использовать следующие программные средства:

– система компьютерной вёрстки LaTeX.

## 11 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для лекций и семинаров может использоваться компьютер и проектор.