NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Научно Исследовательский Семинар 2017

Математические модели в экономике. часть 1.

Sergei Koltcov skoltsov@hse.ru https://linis.hse.ru

Содержимое

НИС 2017

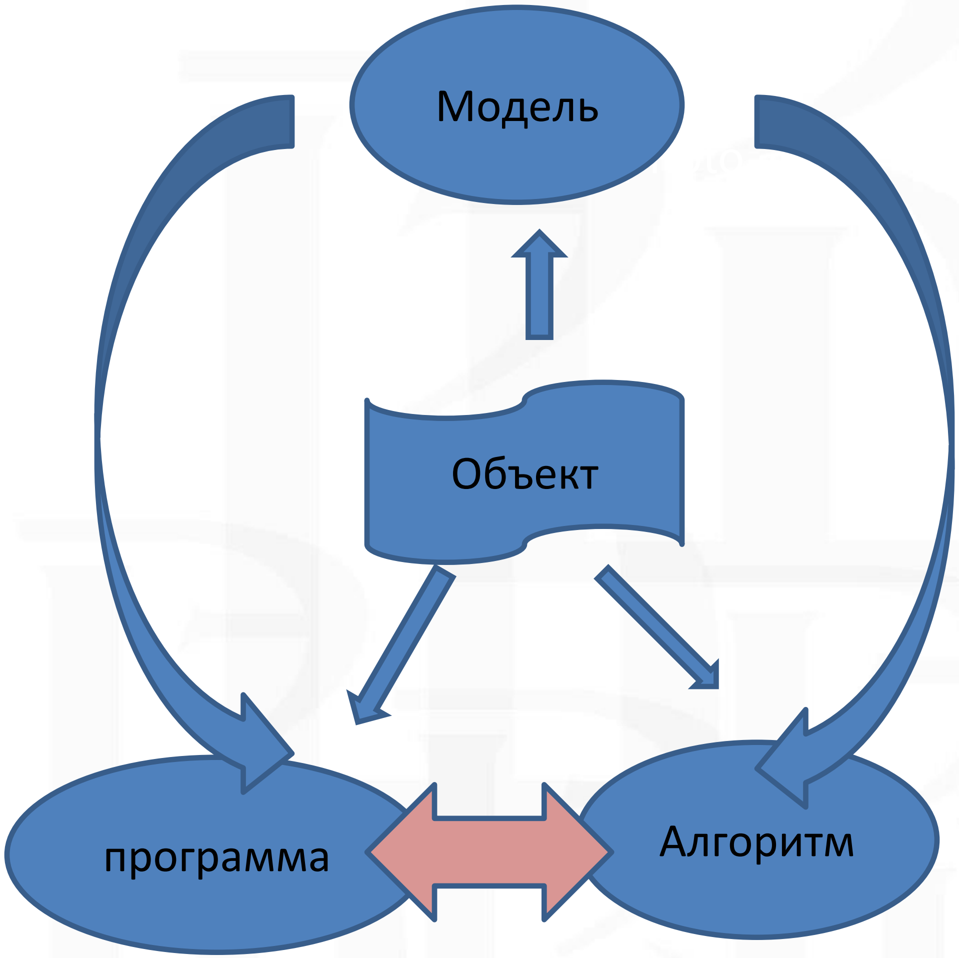
1. Понятие о математической модели экономической системы.
2. Модели основанные на дифференциальных уравнениях. Модель Мальтуса. Гражданские войны в Африке. Модель Эванса.
3. Методы и модели анализа прогнозирования экономических моделей. Метод наименьших квадратов. Взвешенное скользящие среднее. Модель Брауна.

4. Кластерный анализ.
5. Сетевой анализ.
6. Задачи линейного программирования.

7. Статистические и динамические модели в экономике.

Математическая модель и математическое моделирование

- **Объект** - система состоящая из множества элементов. Это может быть ракета, рынок ценных бумаг или популяции животных.
- **Модель** несет в себе отражение связей между элементами. Математическая модель – это математическое представление реальности.
- Учет связей между элементами характеризует полноту модели
- **Моделирование** - процесс расчета поведения системы на основе граничных условий и заданны связей между элементами системы.
- **Алгоритм** – логика расчета поведения системы. Логика может быть основана на разных математических подходах.



Подобие между объектом и моделью

Физическое. Объект и модель имеют сходную физическую природу.

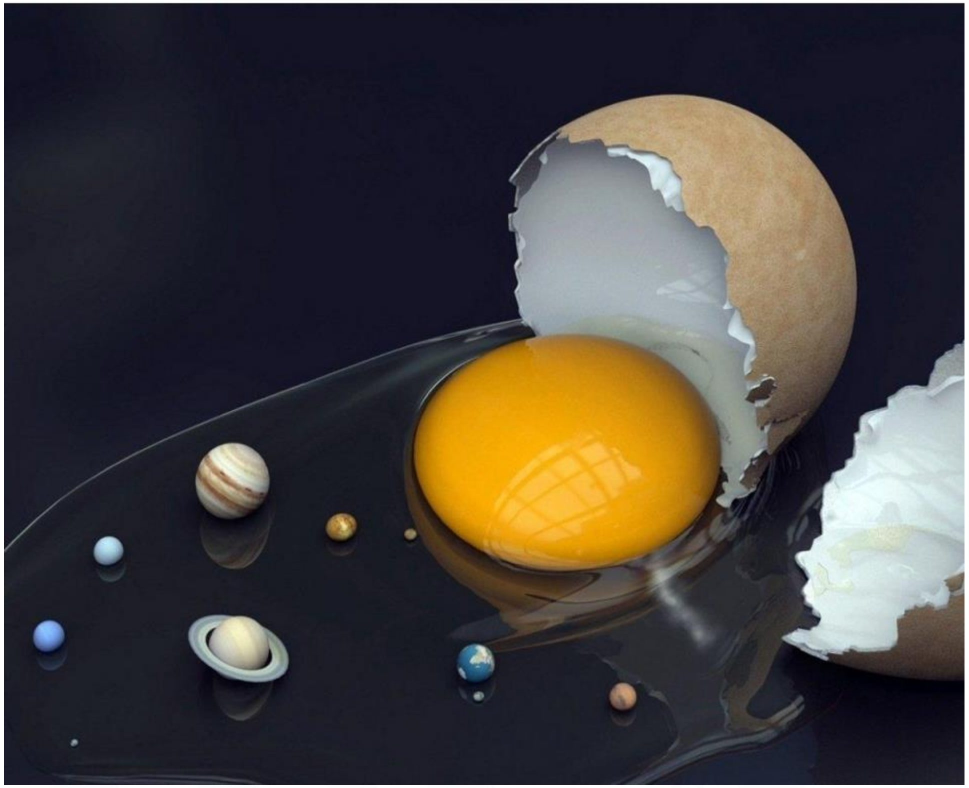
Структурное. Наблюдается сходство между структурой объекта и структурой модели.

Функциональное. Объект и модель выполняют сходные функции при соответствующем воздействии.

Динамическое. Существует соответствие между последовательно изменяющимися состояниями объекта и модели.

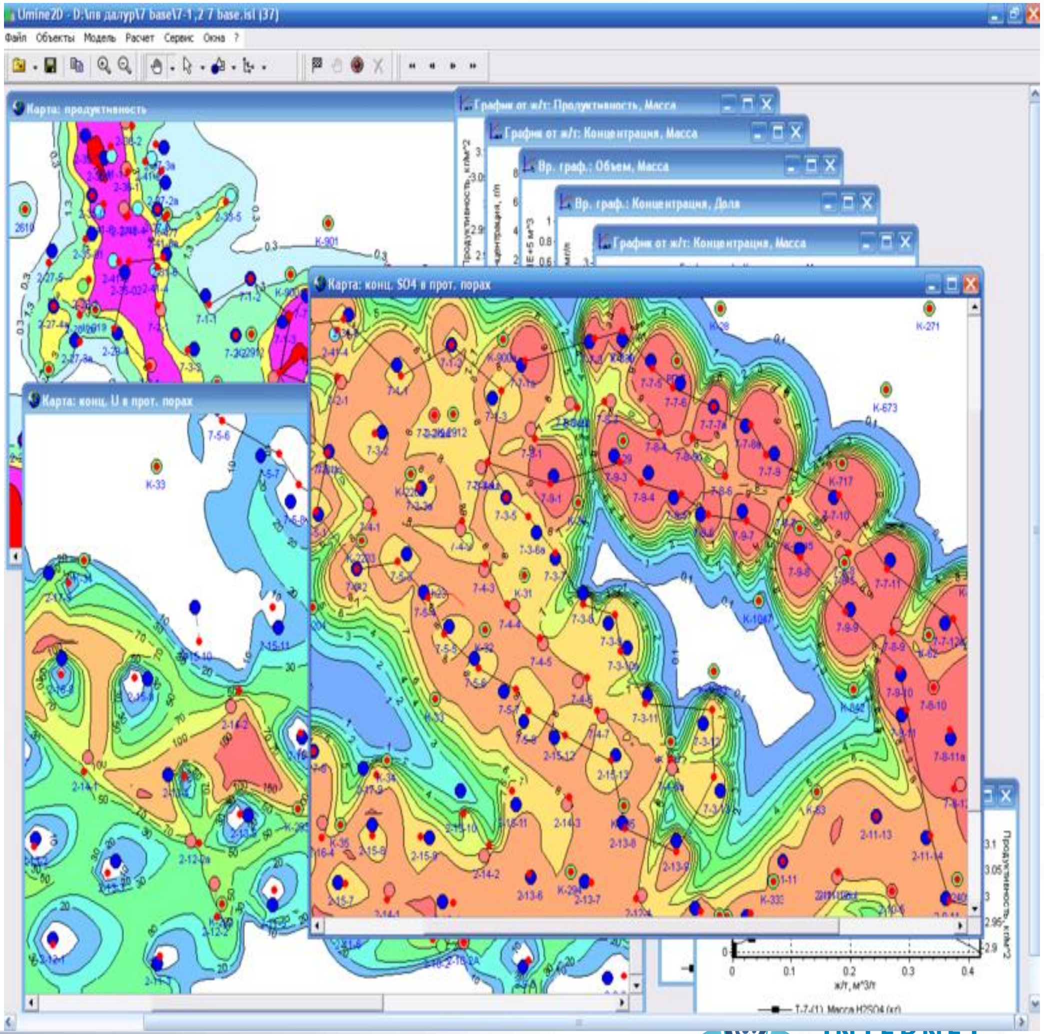
Вероятностное. Существует соответствие между процессами вероятностного характера в объекте и модели.

Геометрическое. Существует соответствие между пространственными характеристиками объекта и модели.



Этапы экономико – математического моделирования

- **Идентификация** объекта. Определение основных параметров объекта.
- **Оценка параметров модели**. Выбор переменных модели на основе параметров объекта.
- **Спецификация модели**. Определение связей между параметрами. Построение уравнений.
- **Проведения моделирования** на основе заданных начальных условий.
- Анализ полученных результатов.



Неопределенность
Экономико - математические модели

1. При теоретическом моделировании эта неопределенность остается за рамками исследования, т.к. целью моделирования является выявление как раз наиболее общих, осредненных закономерностей.

2. При построении прикладных моделей неопределенность характеристик либо изначально закладывается в модель, либо ее необходимо держать "в уме" и понимать, что результат моделирования – это лишь наиболее вероятный вариант.

3. При построении различных эмпирических (и смешанных) моделей надо учитывать еще одно обстоятельство, известное технарям, но забываемое экономистами. Оно заключается в том, что эмпирические закономерности, вообще говоря, нельзя экстраполировать (продолжать за пределы диапазона, охваченного экспериментальным исследованием), так как в неизученной области могут проявить себя принципиально иные эффекты, не характерные для уже исследованной области изменения факторов процесса.

Типы математических моделей

- **Дискретные и непрерывные модели –** В дискретных моделях изменение параметров связано только с отдельными моментами времени. В непрерывных моделях параметры изменяются во времени плавно.
- **Статические и динамические модели –** Динамическая модель изменяется во времени (в отличие от статической системы).
- **Линейные и нелинейные модели –** модели, в которых связь между зависимой и независимой переменными могут быть линейными или нелинейными (например, линейная и нелинейная регрессия).
- **Оптимизационные модели –** оптимизационная модель позволяет из нескольких альтернативных вариантов выбрать наилучший вариант по любому признаку. (например, найти оптимальный путь исходя из минимума затрат).
- **Детерминированные модели –** модели в которых игнорируется случайный характер изменения параметров.
- **Стохастические модели** предназначены для анализа и прогнозирования рассматриваемых экономических явлений в условиях неопределённости исходных данных и реализуются методами математической статистики. (например, модель фондового рынка).

Модели на основе дифференциальных уравнений

Экономической моделью можно считать набор уравнений, основанных на определённых предположениях и приближено описывающих экономику в целом или отдельно ее отрасль (предприятие, процесс). При этом предметом исследований практически всегда является построение и анализ моделей.

Дифференциальным уравнением называют уравнение, содержащие производную или производные неизвестной функции.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка: $$f(y', y, x) = 0$$

Задачей Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной, называют задачу об отыскании решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию

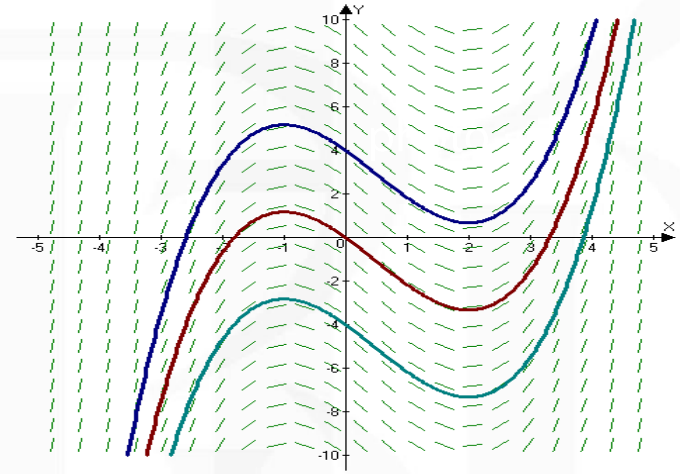
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x = x_0) = y_0 \end{cases}$$

Порядок старшей производной или старшего дифференциала искомой функции в уравнении называется **порядком уравнения**

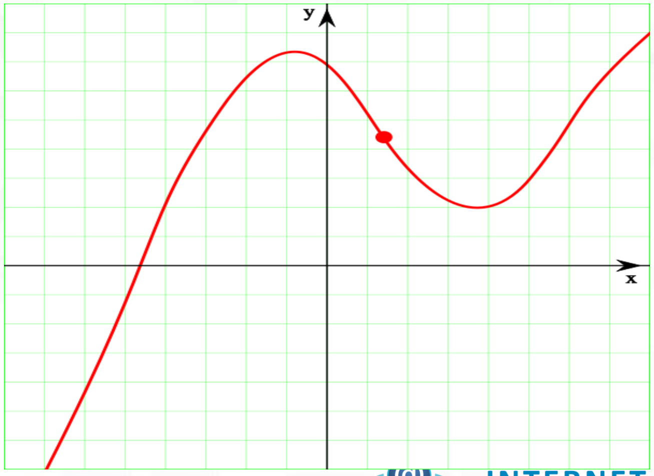
Дополнительные понятия

График решения уравнения называется интегральной кривой.

$$y = \int f(x)dx + Const$$



Непрерывная функция — функция без «скачков», то есть такая, у которой малые изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции.



СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Если правая часть уравнения непрерывна
и имеет непрерывную частную производную

$\dfrac{df}{dx}$ в области D, то решение данного

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x = x_0) = y_0 \end{cases}$$

уравнения с заданными начальными условия
существует и это решение единственно, то есть,
через точку $y(x = x_0) = y_0$ проходит
единственная интегральная кривая.

Важно также понимать, что теорема содержит только достаточные условия существования и единственности решения — при нарушении условий теоремы задача Коши может иметь или не иметь решений, может иметь несколько решений.

Модель Мальтуса

Пример из физики: Скорость распада атомов урана пропорционально числу частиц радиоактивного материала.

$$\frac{dN(t)}{dt} = at$$

Решение: $N(t)=\mathrm{const}\cdot e^{a\cdot t}$

Пример из демографии: Скорость изменения населения пропорциональна численности населения умноженного на сумму коэффициентов рождения (α) и смертности (β).

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha - \beta)\cdot t$$

Решение:

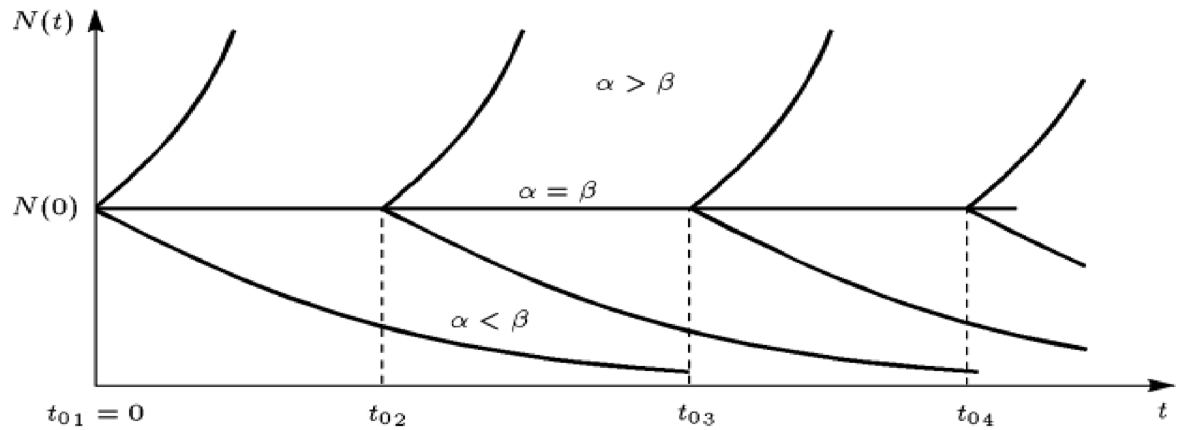
$$N(t)=\mathrm{const}\cdot e^{(\alpha-\beta)\cdot t}$$

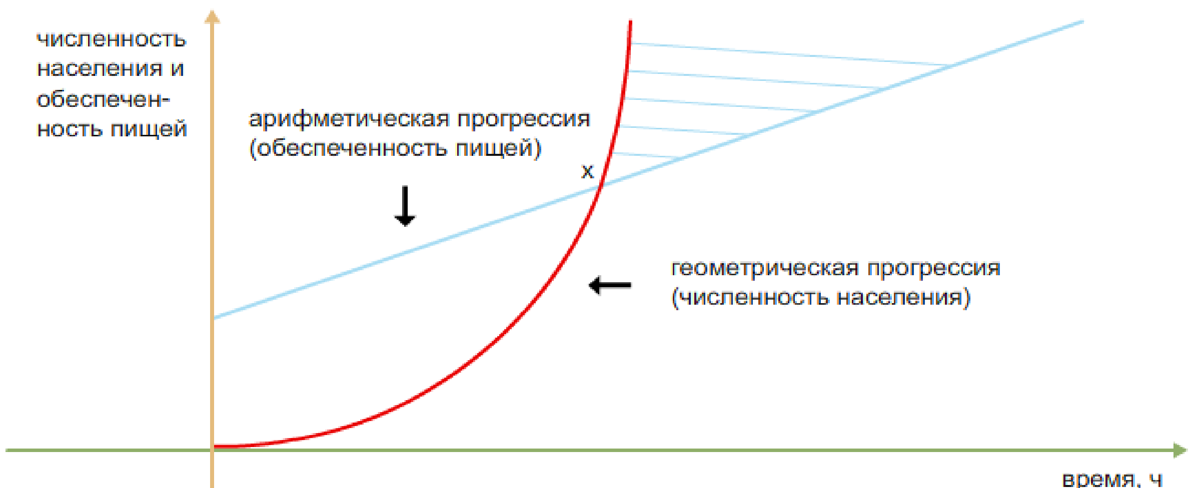
Модель предложена Мальтусом в 1798 г. в его классическом труде "О росте народонаселения".

Модель Мальтуса

Как бы быстро не увеличивалось производство продуктов питания и как бы медленно не росло население, эти прямые пересекутся, то есть определенное число людей будет неизбежно лишено продовольствия.

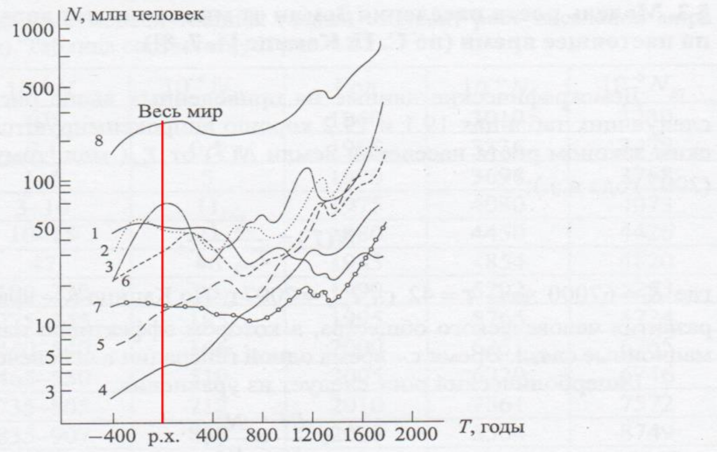
Если (α-β)>0 тогда население увеличивается.



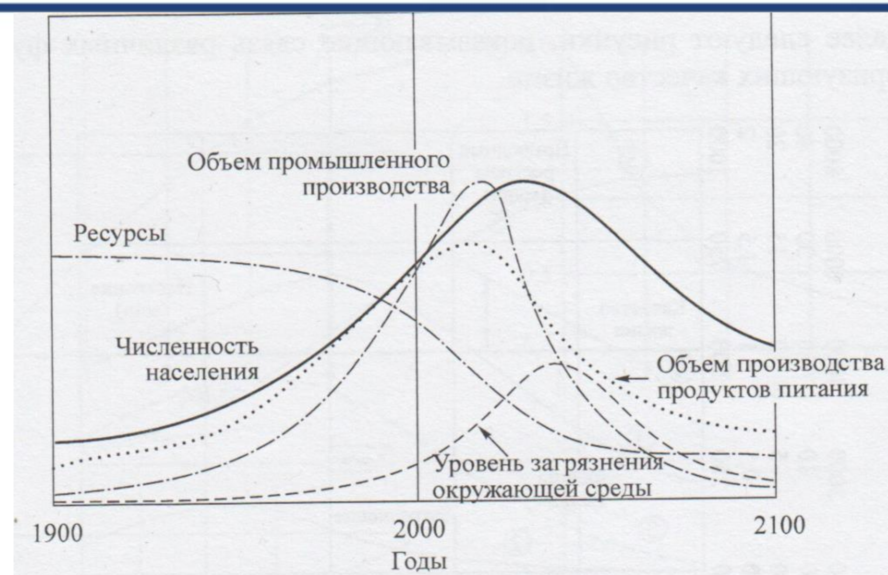


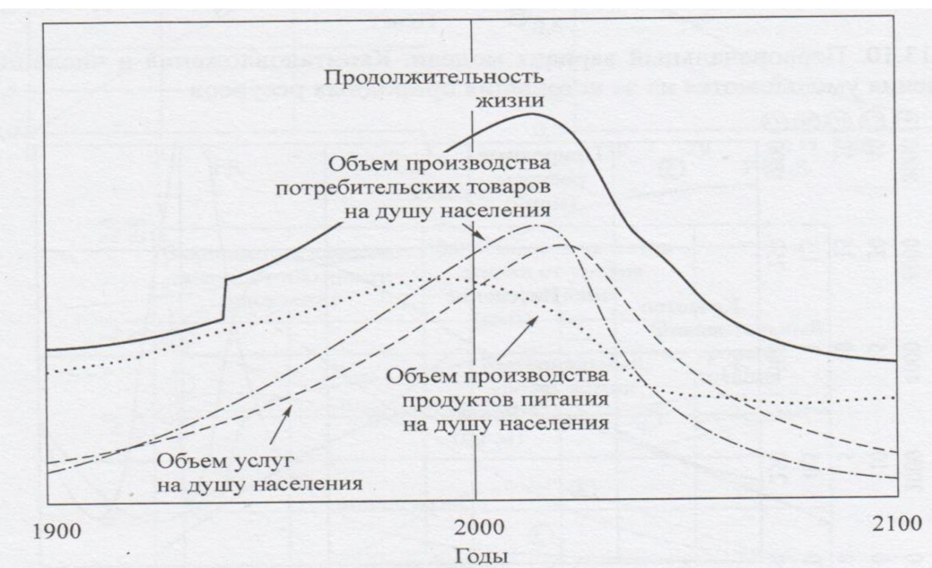
В модели предполагается неограниченность ресурсов.

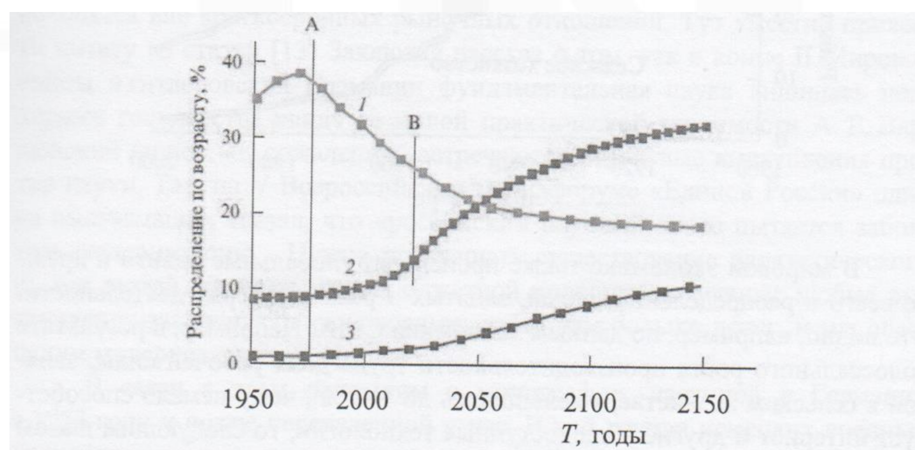
Мальтус прав – Мальтус не прав



Рост населения по регионам от 400-го года до н. э. и до 1800 года. 1 – Юго-Восточная Азия, 2 – Индия, 3 – Китай, 4 – остальная Азия, 5 – Африка, 6 – Европа (без России), 7 – Россия, 8 – весь мир







Старение населения мира при демографической революции 1950–2150 годов. 1 – возрастная группа моложе 14 лет, 2 – старше 65 лет, 3 – старше 80 лет (по данным ООН)

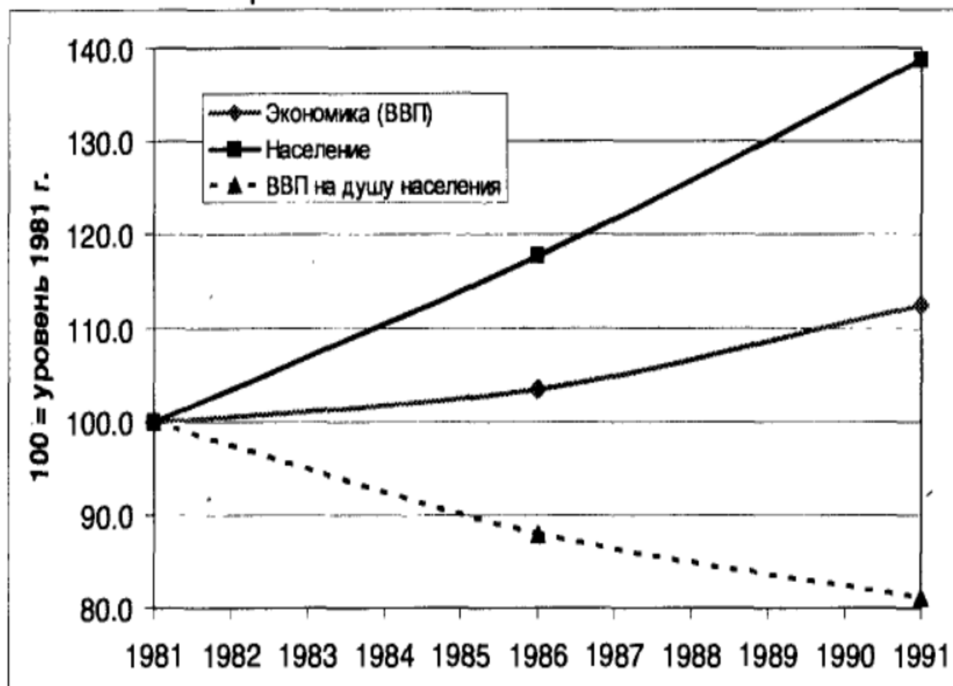
Демографические модели и гражданские войны в Африке

В книге ‘**Законы истории. Математическое моделирование и прогнозирование мирового и регионального развития**’ авторы проанализировали связь между демографическим ростом, ВВП и политической стабильностью.

Корреляция между душевым потреблением продуктов питания (ккал в день) и уровнем политической стабильности

			Уровень душевого потребления, ккал / день / чел.			Итого
			<1850	*1850–2000*	*>2000*	
Уровень политической стабильности	*Стабильная политическая обстановка*	N	2	23	165	190
		%	*16,7%*	*69,7%*	*90,7%*	*83,7%*
	Государственный переворот или кровопролитные массовые беспорядки	N	6	7	15	28
		%	*50,0%*	*21,2%*	*8,2%*	*12,3%*
	Начало масштабной гражданской войны	N	4	3	2	9
		%	*33,3%*	*9,1%*	*1,1%*	*4,0%*
Итого		N	12	33	182	227
		%	*100%*	*100%*	*100%*	*100%*

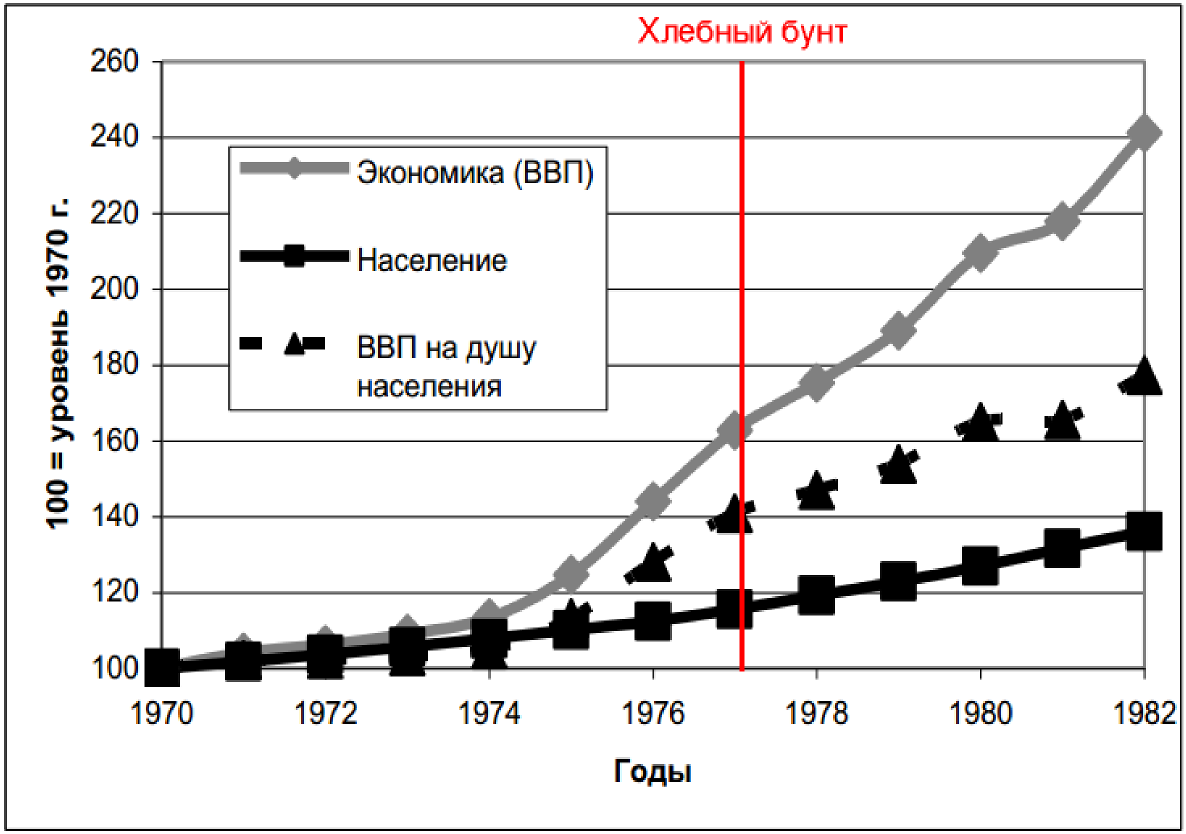
Экономико-демографическая динамика Эфиопии в 1981–1991 гг.



Демографические модели и гражданские войны в Африке

В январе 1977 г. правительство под давлением Международного валютного фонда приняло решение вдвое сократить субсидии на товары первой необходимости. 18—19 января по всей стране прошли многомиллионные демонстрации. Они вошли в историю страны как «**хлебные бунты**»,

Экономико-демографическая динамика Египта 1970–1982 гг.



Модель Эванса: установление равновесной цены на рынке одного товара

Цена товара является функцией от времени $p = p(t)$, $t \geq 0$.

Предложение является функцией от цены товара в момент времени

t и определяется формулой: $$S = S(t) = S(p(t)) = a + bp,$$

Спрос является функцией от цены товара в момент времени *t и*

определяется формулой: $$D = D(t) = D(p(t)) = c - dp$$

Цена товара выражается через спрос и предложение следующим образом:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(D(t) - S(t)) \qquad \frac{dp}{dt} = -\gamma(b + d)p + \gamma(c - a)$$

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

INTERNET STUDIES LAB

Модель Эванса: установление равновесной цены на рынке одного товара

Общее решение уравнения имеет вид: $$p = \alpha e^{-\gamma(b+d)t} + \frac{c-a}{b+d}$$

При условии что *p(t = 0) = p0* $$p(t=0) = \alpha + \frac{c-a}{b+d} = p_0$$

Решение задачи Коши будет (пределу при *t* → +∞):

предельная равновесная цена

$$p^* = \lim_{t\to\infty}\left[\left(p_0 - \frac{c-a}{b+d}\right)e^{-\gamma(b+d)t} + \frac{c-a}{b+d}\right] = \frac{c-a}{b+d}$$

Пример невидимой руки рынка

Модель взаимодействия двух популяций (Модель Вольтера - Лотки).

К сожалению, решить эту систему уравнений аналитически, т.е. выразить $x_1(t)$ и x_2 (t) через известные элементарные функции, невозможно. Однако можно реализовать расчет на компьютере.

$$\frac{dN_2}{dt} = p_2 N_1 N_2 - d_2 N_2$$

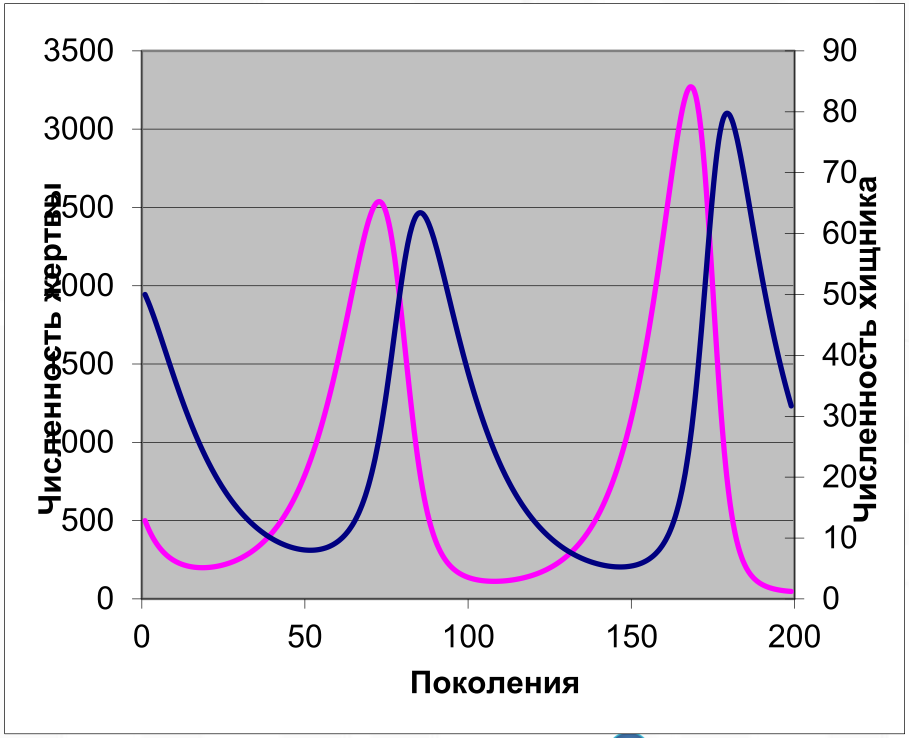
r_1 - рождаемость жертвы

p_1 - коэффициент хищничества для жертвы

d_2 - смертность хищника

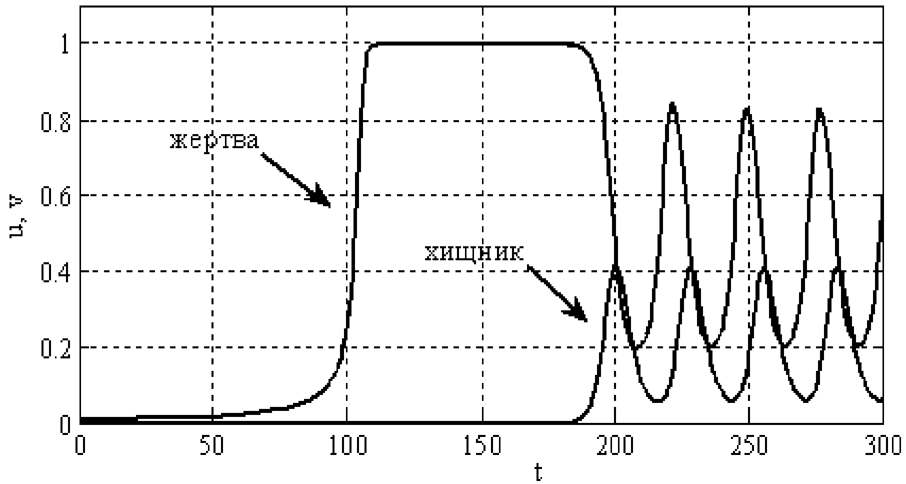
p_2 - коэффициент хищничества

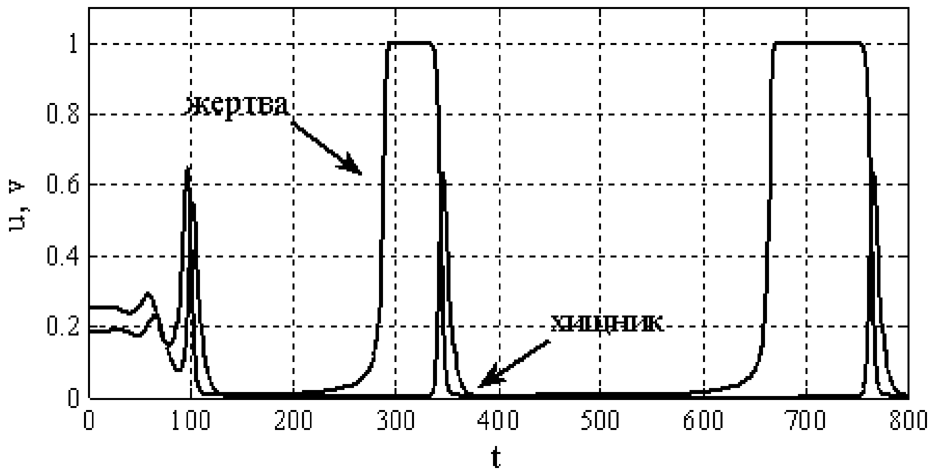
r1	p1	d2	p2
0,1	0.004	0,06	0.0007



Варианты применения модели Вольтера - Лотки

1. Модель «загрязнение–природа». Рассматривается модель В-Л, в которой а вместо хищника используется понятие мощность источника загрязнения за единицу времени, вместо жертвы естественное уничтожения загрязнения.
2. Модель «классовой борьбы». Жертва – рабочие, Хищник - капиталисты.
3. Модель «военных действий». Жертва – армия 1, Хищник - армия 2.
4. Вирусная модель инфекционного заболевания. Хищник - концентрация патогенных антигенов, жертва - концентрация антител.
5. Модель взаимодействия когнитивных и/или эмоциональных мод мозга в борьбе за ресурсы (ресурсы – энергия (кислород и глюкоза) и информация (внимание и память))





Методы и модели анализа прогнозирования экономических моделей

Два метода прогнозирования: 1. Количественное прогнозирование.
2. Качественное прогнозирование (опрос экспертов).

Сложности прогнозирования:

1. **Очень сложно сделать правдивый прогноз, особенно если он касается будущего.**
2. **Предсказать не сложно, сложно предсказать правильно☺**
3. **Числа, если их правильно преподнести, могут сказать о чем угодно.**

Количественное прогнозирование: 1. Каузальные модели (причинно – следственные).
2. Временные модели (например, модель Брауна).

Математическая постановка каузальной задачи $y = f(x1, x2, x3...)$

Например: **y** – спрос на детскую еду, **x** – число детей, 1,2,3. – нумерация месяцев (лет)

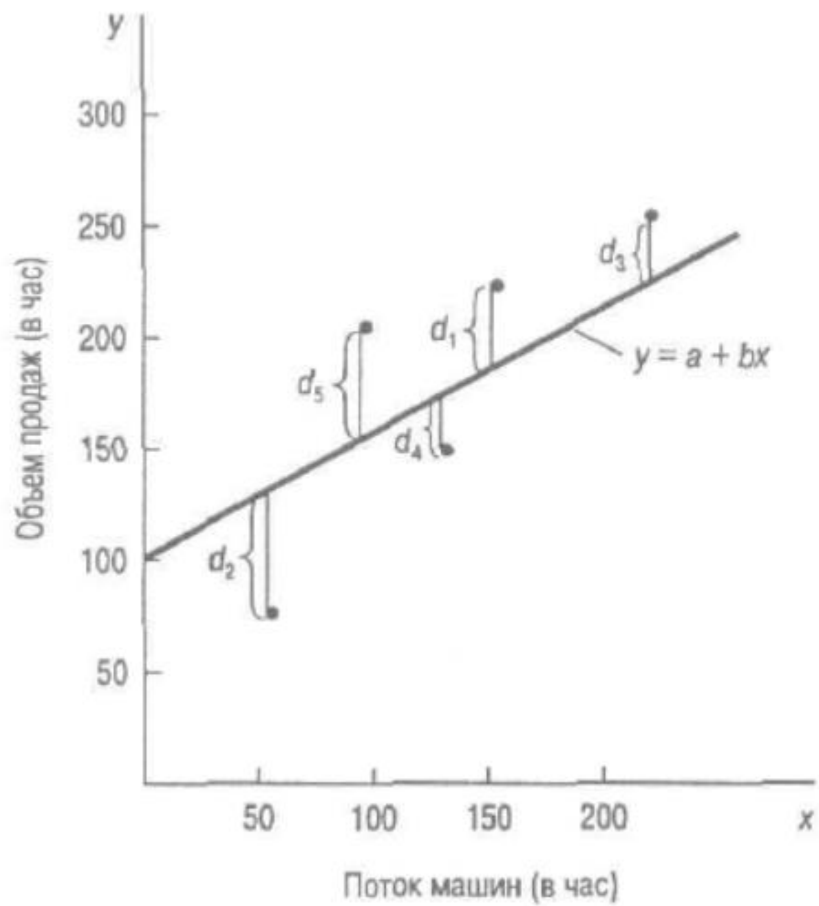
или: **y** – спрос на нефть, **x** – стоимость рубля

Метод наименьших квадратов

Если некоторая величина зависит от другой величины , то эту зависимость можно исследовать, измеряя y при различных значениях x . В результате измерений получается ряд значений:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, , \ldots , x_n;$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_i, , \ldots , y_n.$$

По данным такого эксперимента можно построить график зависимости
$y = f(x, a, b, c\ldots.)$. Полученная кривая дает возможность судить о виде функции $f(x)$. Однако постоянные коэффициенты, которые входят в эту функцию, остаются неизвестными.



Метод наименьших квадратов для линейной функции

Аппроксимация наших данных, например линейной функцией можно выразить следующим образом:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$$

Суть метода НКв заключается в том что можно выбрать такие коэффициенты a,b, так что бы минимизировать квадрат разности между аналитической функцией и экспериментальными данными.

Что бы минимизировать квадрат разности нужно найти частные производные по коэффициентам a, b.

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0$$

Метод наименьших квадратов для линейной функции

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$a = \frac{1}{nS_x^2}\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \overline{x})$$

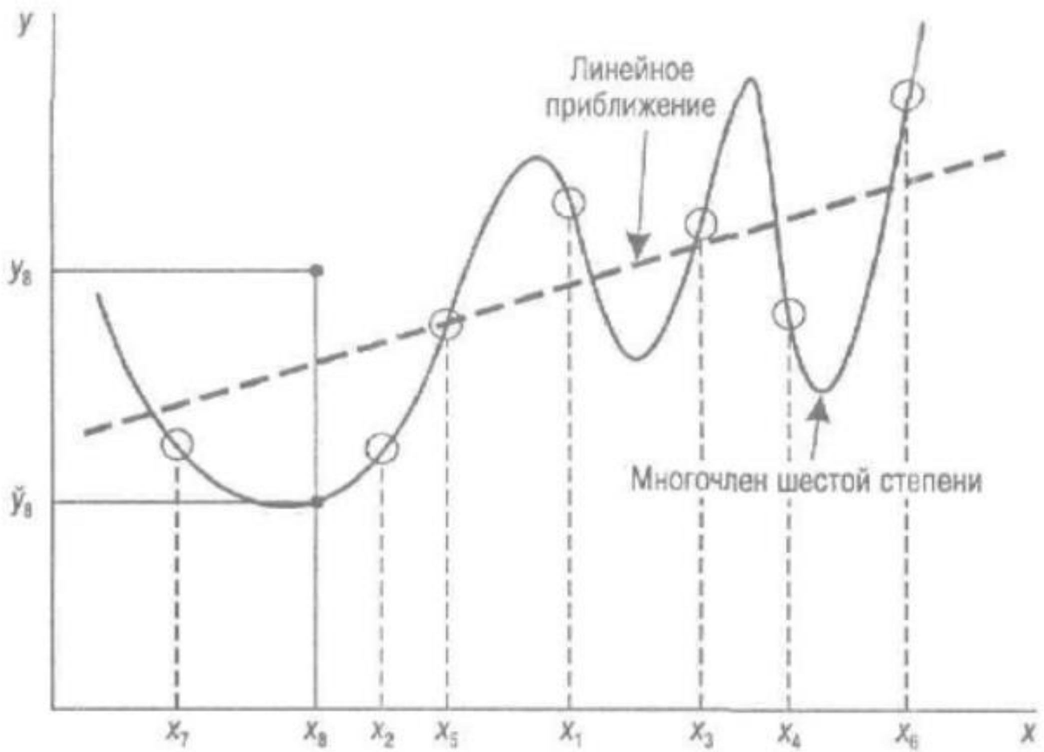
$$b = \frac{1}{nS_x^2}\sum_{i=1}^{n} y_i(\overline{z} - x_i\overline{x})$$

INTERNET STUDIES LAB

Метод наименьших квадратов Проблема выбора степени полинома.

Собственно выбирая большую степень полинома мы будем увеличивать точность аппроксимации, то есть будет уменьшаться сумма квадратов.

Однако это приводит к тому что между точками будет возникать большие флуктуации.
Для того что бы выбрать ‘наилучшее приближение’ можно использовать следующее правило.
Нужно сравнивать среднее значения квадратов ошибок, то, есть для каждого приближения берется величина квадрата ошибки и делится на число точек минус число параметров. Чем меньше эта величина тем лучше.

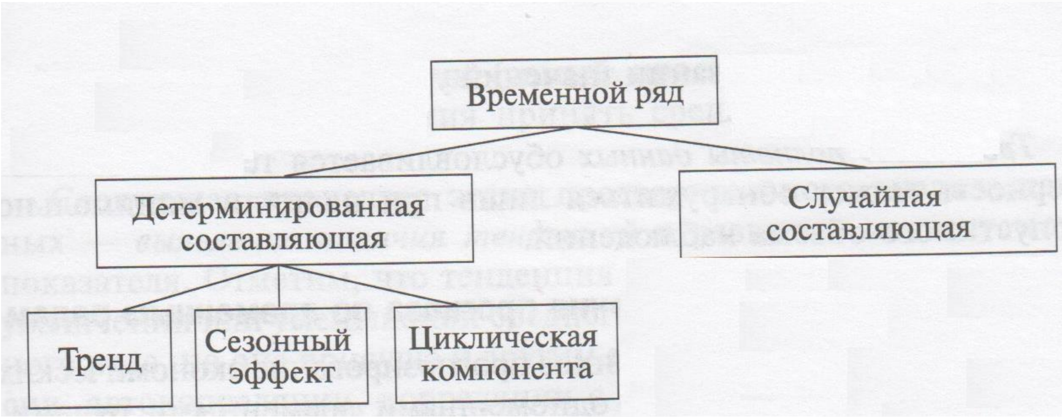


Модель временных рядов.

В статистике под **временным рядом** понимаются последовательно измеренные через некоторые (зачастую равные) промежутки времени данные. **Анализ временных рядов** объединяет методы изучения временных рядов, как пытающиеся понять природу точек данных, так и пытающиеся построить прогноз. **Прогнозирование временных рядов** заключается в построении модели для предсказания будущих событий основываясь на известных событий прошлого, предсказания будущих данных до того как они будут измерены. На пример — предсказание цены открытия биржи основываясь на предыдущей её деятельности.

Какие задачи здесь возникают?
1. **Физика солнца**: а) скрытые периодичности; б) прогноз активности.
Электрокардиограммы (ЭКГ): а) природа наблюдающихся аритмий; б) прогноз развития состояния.
Экономические ряды: а) задача сегментации; б) задача прогноза.
Химическая кинетика: а) анализ химической динамики.

Модель временных рядов.



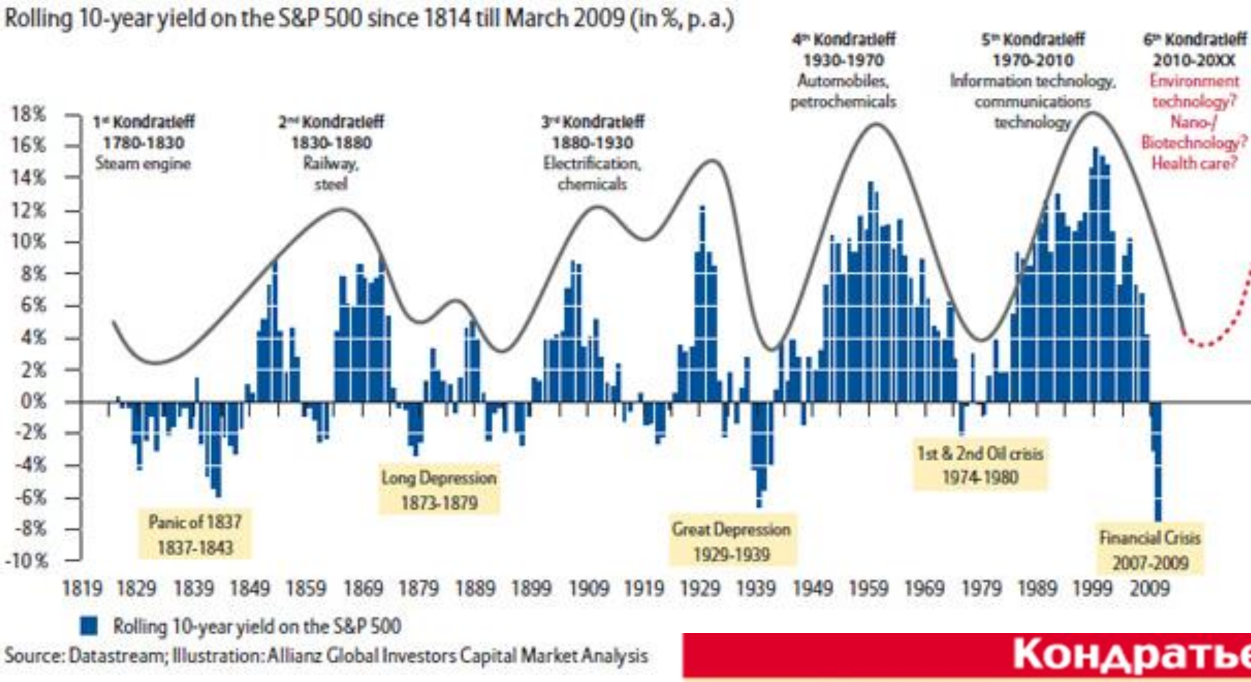
Тренд (тенденция) - устойчивая закономерность, наблюдаемую в течении длительного времени. Например, демографическая характеристика или рост потребления.

Сезонная компонента - функция, которая характеризует сезонные колебания. Как правило это колебания носят периодический или почти периодический характер, например загруженность дорог, пик продаж товаров.

Циклическая компонента - функция, описывающая длительные периоды (более года) спада или подъема. примером таких колебаний являются волны Кондратьева, демографические ямы.

Случайная компонента - шум, который отражает случайное действие многочисленных факторов.

Пример волн Кондратьева

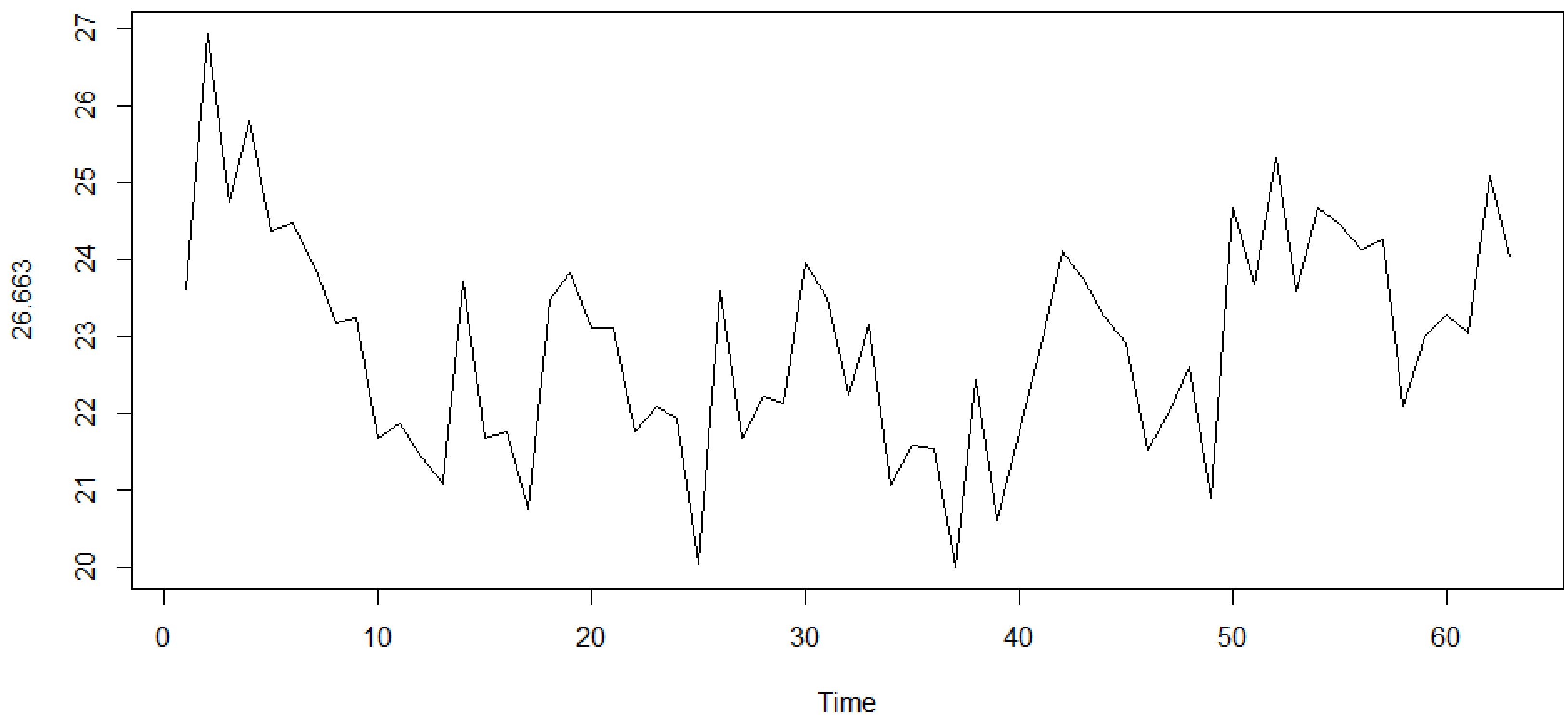


Временные ряды в Rstudio.

	135.27
1	135.96
2	134.67
3	135.15
4	135.22
5	135.11
6	134.97
7	135.13
8	135.15
9	134.91
10	135.06
11	135.93
12	135.31
13	135.07
14	135.22
15	135.64
16	136.74
17	136.19
18	136.45

> plot.ts(xx) - Вывод графика

> library("TTR") - Загрузка библиотеки для работы с временными рядами



NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

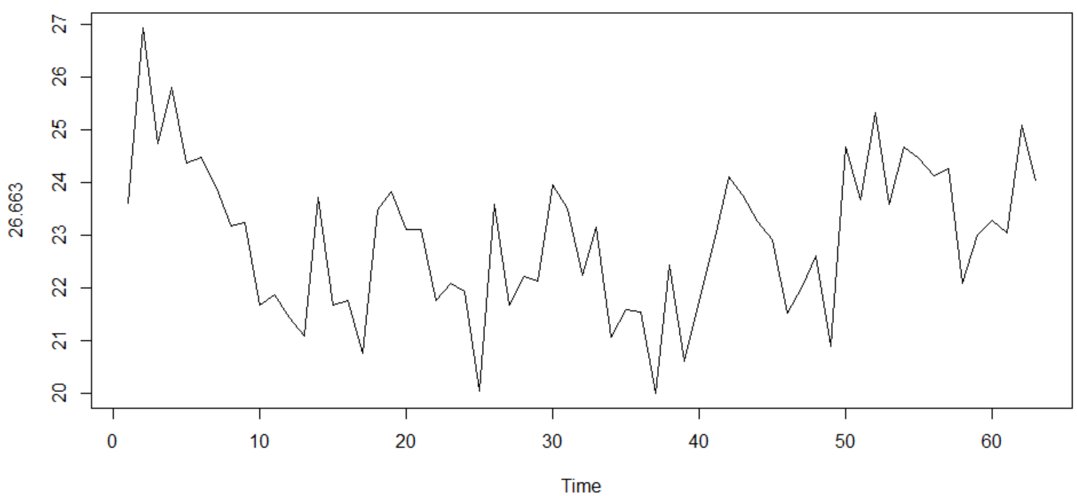
INTERNET STUDIES LAB

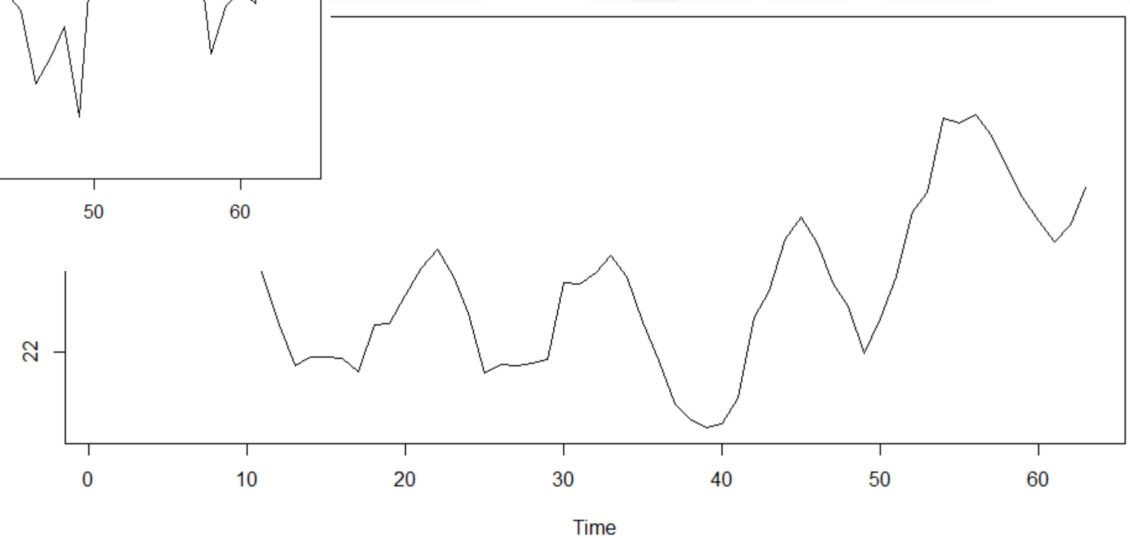
Взвешенное скользящее среднее.

Метод взвешенного скользящего среднего заключается в том что предсказанное значение вычисляется как среднее арифметическое по трем предыдущим данным, при этом каждое из трех величин умножается на веса. Сумма весов должна быть равна единице.

Процедура сглаживания: x3=SMA(xx,n=5)

$$\hat{y}_7 = \alpha_1 y_6 + \alpha_1 y_5 + \alpha_2 y_4,$$





Экспоненциальное сглаживание (Модель Брауна).

Модель экспоненциального сглаживания отличается от метода взвешенного скользящего среднего выбором коэффициента:

где $\hat{Y}_t$ - предсказанное значение за прошлую дату

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)$$

Идея метода заключается в том, что прогнозное значение определяется через предыдущее спрогнозированное значение, но скорректированное на величину отклонения факта от прогноза

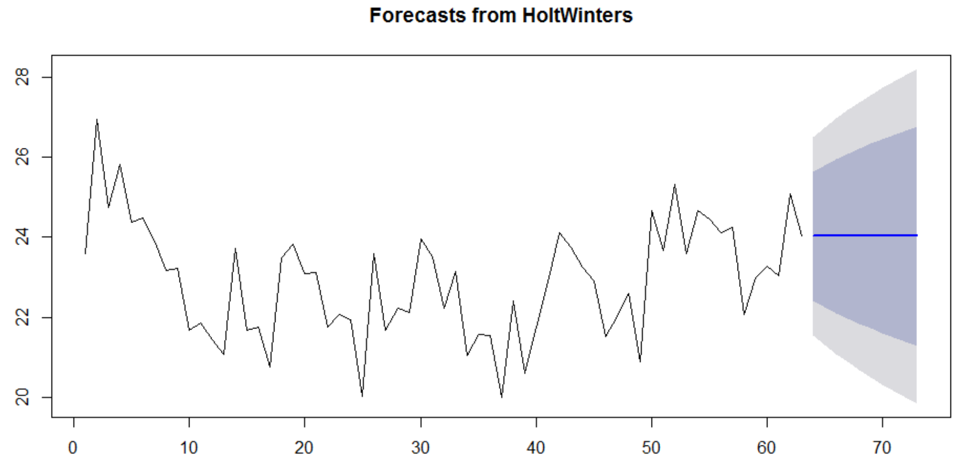
$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_t$$

В Rstudio вместо α используется β

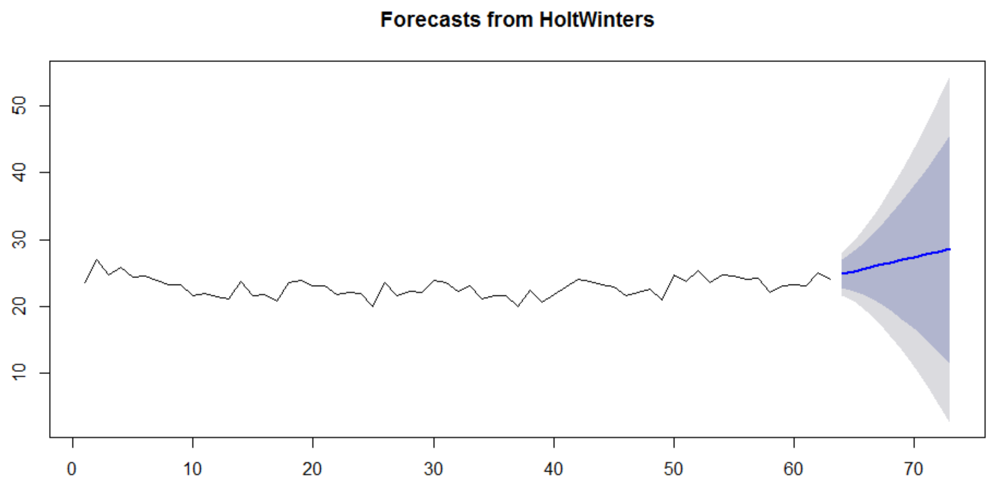
Смотри пакет forecast, функцию HoltWinters

Экспоненциальное сглаживание
Модель Брауна в Rstudio

```
fit <- HoltWinters(xx, beta=FALSE, gamma = FALSE)
plot(forecast(fit))
```




```
fit <- HoltWinters(xx, beta=0.6, gamma = FALSE)
plot(forecast(fit))
```



Thank you for your attention!

Room 216, building 2, 55 Sedova St., St.Petersburg, Russia
Laboratory for Internet Studies
www.linis.hse.ru